

# Drag and Drop to Proof

um jogo digital para demonstrar teoremas

Marcos Henrique de Paula Dias da Silva<sup>†</sup>

PECIM  
UNICAMP  
Campinas/SP/Brasil  
arrasta.o.x@gmail.com

Samuel Rocha de Oliveira

IMECC  
UNICAMP  
Campinas/SP/Brasil  
samrocha@unicamp.br

## ABSTRACT

Mathematical proofs are an important aspect in the degree of mathematicians, and present even in professional degree in related areas. Thus, this work sought to appropriate concepts used in training environments aimed at marathons of programming and work with the use of metaphors to associate different actions to the process of writing a mathematical demonstration, in order to develop a tool to support the learn of "how to write a proof in mathematics". This feature involves arranging chunks of text from a proof, an action considered more complex than reading a proof and usually simpler than writing it yourself. Such dynamics provided, above all, the insertion of some playful elements that characterize this resource for each mathematical statement, as a kind of minigame.

## KEYWORDS

Jogo Digital, Demonstrar, Matemática.

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática surge de modo espontâneo para várias culturas, motivada pelo fator de desenvolvimento humano associado à contagem de objetos, delimitação de áreas ou compreensão dos eventos da natureza. No entanto, os gregos foram pioneiros ao tratá-la em uma abordagem puramente abstrata, desprendida de contextos ou necessidades práticas, registrando assim os primeiros procedimentos de argumentação lógica a garantir validade geral para determinadas declarações [1]. Por exemplo, cabe a Euclides de Alexandria (300 a.C.) a primeira demonstração de que existem infinitos números primos.

Por muito tempo, apresentar uma demonstração não era considerado um procedimento necessário para garantir a veracidade de declarações. Sua validade podia ser atribuída ao sucesso em todos os casos já testados ou por argumentos de autoridades na área [1]. Demonstrar (ou provar) a validade/falha de uma afirmação é a base da "Matemática Moderna", termo que se refere ao nosso atual sistema axiomático formal da Matemática, fundamentado em rígidos

princípios lógicos [2]. No contexto da "Matemática Moderna", é natural exigir que cada afirmação não seja tratada como mais do que uma hipótese até uma demonstração rigorosa ser apresentada. Não por acaso temos hipóteses que continuam em aberto há vários séculos, como a Conjectura de Goldbach.

No parecer CNE/CES nº 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001 - Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura no Brasil [3], podemos ver o papel das demonstrações e rigor matemático explicitamente na formação Bacharel e implicitamente na formação do Licenciado em Matemática. Contudo, a presença das demonstrações Matemáticas pode se aparecer em outros cursos de graduação a partir dos livros-textos utilizados de base para disciplinas voltadas à ingressantes, como Cálculo Diferencial e Integral com uma variável real. Tomando por exemplo o livro "Cálculo em uma variável real" do autor Plácido Z. Táboas [4], temos que a primeira menção às demonstrações ocorre na página 12, onde logo após apresentar 4 propriedades da função valor absoluto, diz que suas respectivas demonstrações são deixadas como exercício. De forma geral, há uma tendência dos livros-textos de disciplinas de Matemática para graduação, de tratarem demonstrações no corpo do texto.

A tendência de trazer as demonstrações para disciplinas de Matemática em cursos de graduação pode ser entendida como um reflexo da literatura mencionada. Mas também podemos observar esta prática no conjunto de vídeo aulas disponibilizadas pela UNIVESP (Universidade Virtual do Estado de São Paulo) e recomendadas pela Unicamp no *Programa Emergencial de Disciplinas de Graduação e Pós - planos de atividades e instruções para complemento de estudos no período inicial da pandemia de COVID-19* [5]. Nestas vídeo aulas, várias das quais produzidas a partir de filmagens de aulas presenciais e direcionadas para graduandos matriculados em disciplinas de Matemática, percebemos ocasiões em que os docentes, após enunciar alguma propriedade, apresenta sua demonstração.

Assim, diante da relevância da problemática levantada, este trabalho apresenta um jogo digital para auxiliar no desenvolvimento das habilidades de demonstrar teoremas.

## 2 DIFICULDADES NA HORA DE DEMONSTRAR

Em um estudo recente, Azrou e Khelladi [6] analisaram as dificuldades dos alunos de graduação em Matemática para escrever demonstrações, sendo as principais características observadas, o uso de argumentos fracos e mal estruturados em seus textos. Os autores, descobriram que há uma grande diferença no desempenho do estudante quando este resolve uma atividade voltada para fixação de uma técnica ou procedimento, se comparada a uma atividade que exige um processo criativo ou argumentativo de elaborar uma demonstração.

Esta observação coincide com os resultados observados por Ko e Knuth [7] sobre a dificuldade dos estudantes na escrita das demonstrações para validar ou refutar propriedades de uma disciplina recém-cursada. Os autores afirmam que os alunos tiveram dificuldades em formular contraexemplos, e principalmente para construir argumentos corretos. Em várias ocasiões tentaram achar um contraexemplo para uma afirmação verdadeira ou validar uma afirmação falsa. Apresentando falhas em comportamentos e atitudes referentes à análise, compreensão, produção e desenvolvimento de provas. Simon e Blume [8] consideram que o processo de aprender a demonstrar tem as seguintes três dimensões:

- O grau de identificação de regularidades ou o desenvolvimento do raciocínio dedutivo;
- A qualidade explicativa que permite conectar o conhecimento existente ao resultado;
- O domínio das técnicas de demonstração e a habilidade de operar propriedades Matemáticas.

Contudo, Hart [9] investigou como estudantes de Matemática demonstravam em dois cursos de Álgebra Abstrata para graduação e em um curso inicial para pós-graduação. Os estudantes receberam uma página de fatos relevantes da Teoria de Grupos, a fim de reduzir a quantidade de variação no desempenho da resolução das demonstrações devido à capacidade de lembrar os fatos necessários e verificou-se que “a quantidade de experiência acadêmica com Álgebra Abstrata não reflete necessariamente o nível de compreensão” (p. 56, tradução própria). Pois a maioria dos estudantes investigados por Hart [9] tiveram pouco ou nenhum sucesso nas demonstrações, e apenas alguns fizeram um progresso razoável. No geral, nenhum estudante foi capaz de produzir uma demonstração totalmente aceitável, mesmo com a orientação do entrevistador.

Brown et al. [10] consideraram que no estudo de Hart [9], o grau de especificidade do objeto matemático a ser mentalmente construído e que advém do processo de demonstrar, foi a principal razão para a falha dos estudantes. Brown et al. discutem a partir de um modelo mental o que

torna a demonstração de uma propriedade Matemática uma tarefa tão difícil.

- Construir em sua mente uma certa coleção de objetos, qualquer um dos quais pode ou não satisfazer uma propriedade;
- Aplicar um processo de seleção incluindo um componente que verifica se um objeto com a propriedade existe no conjunto;
- Localizar um objeto específico que satisfaça a propriedade.

## 3 A METÁFORA DRAG AND DROP TO PROOF

Ao se discutir o ensino de conceitos abstratos, tais como demonstrações, temos nas múltiplas representações uma forma discutida por Lawler [11] capaz de melhor aproximar as operações mentais envolvidas. Esta variedade, segundo o autor, proporciona clareza nos procedimentos necessários a seguir, associando-a por vezes a outras representações sensoriais e também a esquemas mentais mais amplos. Assim, investigações sobre como se formam as habilidades necessárias para compreender as demonstrações, possibilita enxergarmos em um nível mais abstrato os processos por trás da resolução de problemas e das multilinguagens necessárias durante seu tratamento.

Na questão do uso de materiais concretos, Anderson [12] discute que estudantes novatos em um domínio, quando recebem instruções de complexidade modesta, não são capazes de realizar as operações descritas sem erro. As instruções são insuficientes para configurar procedimentos e executar habilidades. Assim as produções interpretativas devem converter esse conhecimento em comportamento.

Assim, o jogo digital *Arrasta o X*, também conhecido como *Drag and Drop to Proof*, cujo nome pode ser traduzido do inglês como “Arraste e Solte para Provar”, procura converter a ação de escrever demonstrações Matemáticas no comportamento de montar demonstrações Matemáticas como se fosse um quebra-cabeças. Tal procedimento se dá mediante o trabalho com metáforas, no que tange às ações de arrastar e soltar, associadas à finalidade de “demonstrar” organizando e arranjando os pedaços do texto de uma demonstração original. O termo metáfora designa uma comparação implícita entre domínios de origem e destino [13]. Sendo tratada já a várias décadas como um eficiente mecanismo de apoio à aprendizagem, pois permite a associação de conhecimentos prévios a novas situações [14].

## 4 ARQUITETURA

A arquitetura deste software baseou-se na prática dos autores com maratonas de programação (eventos organizados pela Sociedade Brasileira de Computação desde 1996 e

direcionados a graduandos e pós-graduandos nas áreas de Computação e afins). Uma forma bastante comum de preparar-se para estas competições envolve o URI Online Judge, um site desenvolvido pelo Departamento de Ciência da Computação da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, cujo principal objetivo é fornecer práticas de programação e compartilhamento de conhecimento. Isto ocorre permitindo, por exemplo, a submissão de soluções para problemas de edições anteriores da maratona e o feedback imediato sobre o cumprimento das metas estabelecidas. Apesar do site não propor nenhuma recompensa direta, podemos constatar que o ambiente competitivo incentiva um empenho notável por diversas universidades/estudantes a fim de subirem seus placares encarando desafios que de certa forma podem somar nas suas habilidades ligadas ao campo da Computação.

Inspirado na proposta da plataforma URI Online Judge, pensamos para nosso jogo o estabelecimento de um ambiente com feedback automático para demonstrações de teoremas, como aquele apresentado por Bickerton e Sangwin [15]. Mas neste modelo o sistema utiliza uma estrutura de múltipla escolha e escrita pontual de termos/expressões, permitindo assim um feedback automático a partir de um conjunto limitado de respostas possíveis de serem preenchidas. O que apesar da semelhança no tema, dista da metáfora escolhida por apresentar uma estrutura definida de procedimentos, cabendo ao jogador apenas completar os espaços vazios.

Dessa forma, entendemos que para preservar o grau de liberdade criativa desejado, precisávamos de uma avaliação flexível e passível de interpretação por um especialista. Neste ponto de vista, viabilizamos para este fim um mecanismo de feedback semiautomático. Assim, cada vez que uma peça muda de posição na tela, o sistema registra de forma concatenada, sua posição anterior, o rótulo da peça e sua posição atual na forma de um código de 6 dígitos. Desse modo, rodando este código naquele enunciado é possível não só recuperarmos a forma final daquela demonstração, mas também os procedimentos utilizados para se chegar nela.

O mecanismo de feedback no caso, verifica se na base de dados daquele enunciado existe uma solução com versão final igual à esta (independente do procedimento de montá-la ter sido diferente). Se sim, então o jogador recebe imediatamente o feedback. Se não, a solução é encaminhada para um especialista que avalia e registra no banco de dados aquela solução junto ao seu feedback. Assim, quando outro jogador demonstrar com esta mesma combinação de peças, receberá um feedback imediato do sistema. Em ambos os casos, o jogador tem acesso imediato a uma forma possível de se demonstrar com aquelas peças, para que possa entender melhor o que fez (ou o que poderia ter feito).

O desenvolvimento deste software passou por processos de prototipagem, dos quais identificamos o potencial da ferramenta copiar/colar se aplicada ao uso de peças repetidas. Assim, optamos por tratar as peças repetidas como uma única

peça fornecida ao jogador com liberdade para replicá-la. Isto aumentava a dificuldade de formar as demonstrações, dado que o jogador precisaria escolher as peças que duplicará e quantas vezes fará isso, além de favorecer um aspecto visual mais limpo e com maior liberdade criativa para compor sua demonstração.

Esta decisão também afetou inclusive a forma como fragmentamos os textos originais, pois passamos a isolar trechos que se repetem durante a demonstração. Nos protótipos percebemos também a necessidade de especificar o significado das peças, evitando que isto ocorra de forma textual, pois o acúmulo de informações poderia desviar a interação do usuário com a real finalidade do sistema. Para isso adotamos uma relação de cores (estratégia presente em diversas interfaces de programação), associando as peças a seus significados dentro da estrutura comum das demonstrações.

## 5 JOGO DIGITAL

O jogo digital *Arrasta o X* (ou *Drag and Drop to Proof*) encontra-se em fase de alimentação do banco de dados. Ou seja, nossos esforços estão direcionados no aumento do número de usuários/respostas. Pois a estrutura idealizada para disponibilizar um feedback semiautomático exige uma quantidade elevada de registros para cada enunciado. Afim de atender esta necessidade e também conhecer melhor a interação com o usuário, foi desenvolvida na linguagem de programação Scratch 3.0 uma versão preliminar do software. Contudo, a plataforma do Scratch limita armazenar em nuvem a interação de usuários sem registro ou New-Scratchers. Para contornar esta dificuldade dado nossa intenção de aumentar o número de respostas, convertemos os projetos originais para a linguagem JavaScript e hospedamos suas variáveis de interação no armazenamento em nuvem do <https://turbowarp.org/> (um mod do Scratch). Com isto, qualquer interação com estas variáveis ficaria registrada no nosso sistema.

Sua interface foi planejada para desktops, pois utiliza além do mouse/touchpad, também duas teclas (SPACE, Z). Esta escolha sobretudo foi tomada pensando num layout mais simples e numa melhor resolução para a leitura do conteúdo das peças. Sua jogabilidade é distribuída em três momentos, com ações próprias:

1. Escolher um enunciado (página web com hyperlinks para cada demonstração)
2. Demonstrar (Arrasta o X em JavaScript)
  - Arrastar e soltar peças (clicar e puxar);
  - Duplicar peças (segurar SPACE e clicar);
  - Enviar a demonstração (apertar Z);

3. Após demonstrar

- Ver uma forma de demonstrar aquele enunciado;
- Voltar à etapa 1 (retornar à página web);
- Voltar à etapa 2 (atualizar a página atual).

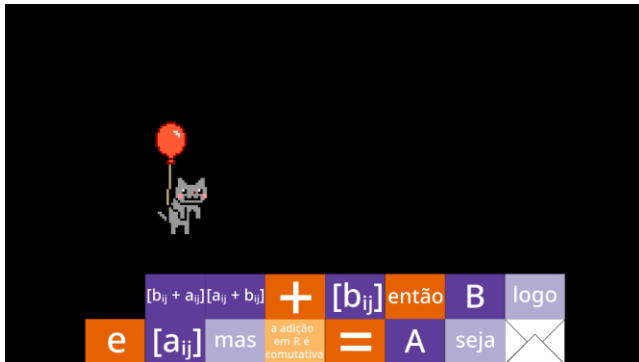


Figura 1: Situação inicial das peças para demonstrar que a adição de Matrizes é uma operação comutativa

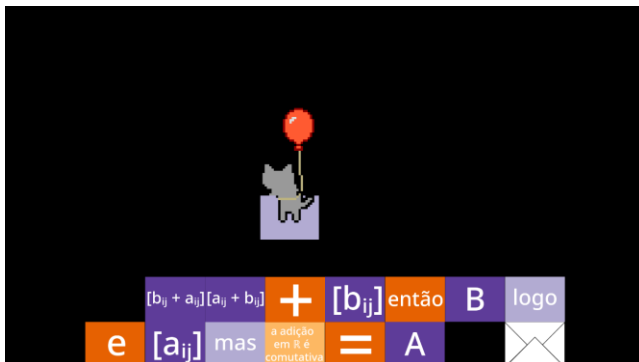


Figura 2: Primeira peça (seja) em movimento

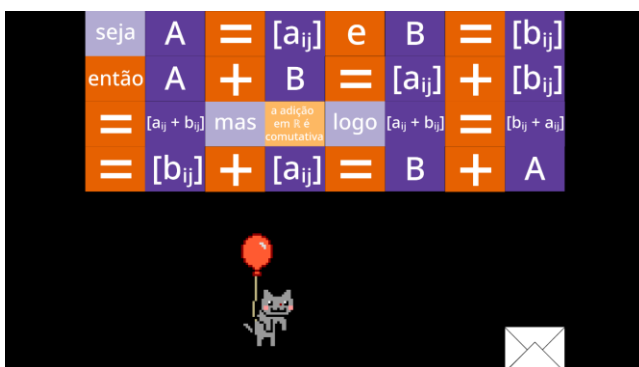


Figura 3: Demonstração concluída

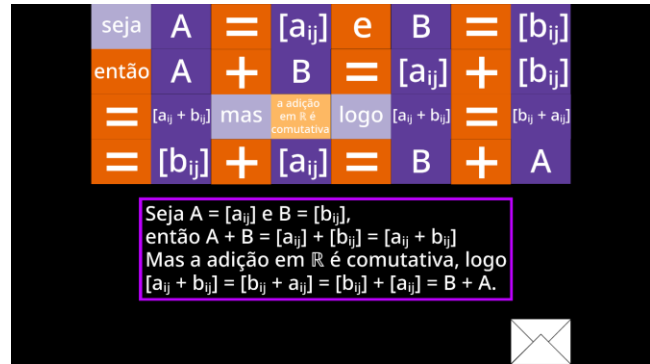


Figura 4: Demonstração enviada e apresentação para o usuário de uma demonstração possível com aquelas peças

A interação do usuário com as peças ocorre mediante o clique do mouse/touchpad junto ao movimento de arrastar/soltar. Contudo, a inserção de um personagem “responsável” (um gato num balão) por este movimento, parece ter favorecido a divulgação do software em redes sociais a partir de vídeos do seu gameplay e também permitiu uma forma discreta de sinalizar ao usuário que o envio da sua resposta foi efetivado (o gato voa para fora dos limites da tela).

Este jogo tem como diferenciais as formas como o banco de dados e de enunciados do sistema cresce a partir da quantidade de usuários. Pois a principal razão desta versão ter sido desenvolvida em Scratch 3.0, foi facilitar sua reusabilidade, visto que é um software livre e de programação relativamente fácil, podendo com moderado esforço matemático, ser editado pela maioria dos matemáticos para atender a outras demonstrações.

Entre as limitações deste software, temos na sua própria metáfora de interface, a dificuldade em se enxergar as combinações possíveis de peças quando sua quantidade de peças ultrapassa duas dezenas. Outra complicação presente, se dá no tamanho de algumas demonstrações, que não ficam visualmente legíveis em apenas uma tela. Uma estratégia para contornar ambas as dificuldades mencionadas, envolve segmentar a demonstração original em subpartes de uma demonstração. Por exemplo, se a demonstração original mostra que algo existe e é único, podemos olhar isoladamente o quão longa é a demonstração da existência e o quão longa é a demonstração da unicidade. Assim, mesmo para uma demonstração mais longa, algumas de suas *subdemonstrações* (que também são demonstrações) poderiam caber na tela e serem ajustadas a este software.

## 6 CONSIDERAÇÕES

Como discutido anteriormente, o processo usual que envolve a elaboração de demonstrações depende da capacidade de construir mentalmente objetos que satisfazem a propriedade

[10]. No caso deste jogo digital, a metáfora de montar a demonstração reduz o espaço amostral de objetos construtíveis e direciona o esforço as outras duas etapas (aplicar um processo de seleção e localizar um objeto específico que satisfaça a propriedade).

Também consideramos que o jogo proporciona uma prática que se encontra entre o “ler uma demonstração”, e o “escrever uma demonstração”. Se localizando como um procedimento intermediário que envolve parcialmente a leitura e a elaboração de uma demonstração. Um contexto que pode favorecer o desenvolvimento inicial destas habilidades, atuando como uma estrutura de andaimes. Ou seja, a medida que o estudante adquire domínio nestas ações, o facilitador proposto pelo jogo vai se tornando cada vez mais dispensável.

## REFERÊNCIAS

- [1] CHEMILA, K. *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. Cambridge University Press, 2012.
- [2] ROSSI, R. J. *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2006.
- [3] MEC, MINISTERIO DA EDUCAÇÃO. CNE/CES nº 1.302/2001, aprovado em 6 de novembro de 2001 - Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. 2002.
- [4] TABOAS, P. Z. *Cálculo em uma variável real*. EDUSP, 2008.
- [5] UNICAMP. Programa Emergencial de Disciplinas de Graduação e Pós-graduação de atividades e instruções para complemento de estudos no período inicial da pandemia de COVID-19. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 2020. Disponível em <<https://www.ime.unicamp.br/sobre-programa-emergencial-disciplinas-graduacao-pos-graduacao>> acesso em 10 de janeiro de 2022.
- [6] AZROU, N., KHELLADI, A. Why do students write poor proof texts? A case study on undergraduates' proof writing. *Educational Studies in Mathematics*. 2019.
- [7] KO, Y., KNUTH, E. Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Educational Studies in Mathematics*. 2009.
- [8] SIMON, M. A., BLUME, G. W. Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*. 1996.
- [9] HART, E. A conceptual analysis of the proof-writing performances of expert and novice students in elementary group theory. In E. Dubinsky and J. Kaput (Eds.), *Research issues in mathematics learning: Preliminary analyses and results*, MAA Notes, E. Washington: The Mathematical Association of America. 1994.
- [10] BROWN, A., DEVRIES, D. J., DUBINSKY, E. THOMAS, K. Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*. 1997.
- [11] LAWLER, R. W. Thinkable models. *The Journal of Mathematical Behavior*. 1996.
- [12] ANDERSON, J. R. Knowledge compilation: The general learning mechanism. In R. S. Michalski, J. G. Carbonell, & T. M. Mitchell (Eds.), *Machine learning Vol. II*. Los Altos, CA: Kaufmann. 1986.
- [13] NEALE, D. C., CARROLL, J. M. The Role of Metaphors in User Interface Design. Em *Handbook of Human-Computer Interaction*, M. Helander, T.K. Landauer e P. Prabhu (eds.) (1997) chapter 20, Elsevier Science, 1997, p. 441-462.
- [14] BRUNER, J. S. *The Process of Education*. London: Oxford University Press, 1960.
- [15] BICKERTON, R., SANGWIN, C. J. Practical Online Assessment of Mathematical Proof. Cornell University. ArXiv:2006.01581, 2020.