O PAPEL DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

MÉRICLES THADEU MORETTI[1]

Resumo

Apresentaremos neste trabalho um pouco da teoria de Raymond Duval relativa as noções de registros de representação semiótica e de congruência semântica. Veremos que muito das dificuldades observadas em sala de aula na resolução de problemas nos mais diversos temas e níveis de ensino de matemática podem ser explicadas em termos dessas noções: o trânsito entre as mais diversas formas de um mesmo objeto matemático, assim como o custo cognitivo desta operação. Trazendo alguns elementos da semiótica descreveremos sob que condições a aprendizagem em matemática realiza-se para este autor.

Abstract

This work focus on the theory of Raymond Duval, which investigates thes registers of semiotic representation and semantic congruence. We discuss, for example, that many of the difficulties observed in classroom in relation to problems on various topics and at the flow of the different forms of the same mathematical object and the cognitive demands of this operation. Bringing some semiotic elements into this discussion, we describe under which conditions the learning of mathematics takes place, according to Raymond Duval.

[1] Professor do Departamento de Matemática/CFM/UFSC e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Tecnologia-CFM/CED/UFSC. E-mail: mericles@mtm.ufsc.br

Palavras-chave:

Registros de representação semiótica; congruência semântica; apreensões em geometria; aprendizagem em matemática.

Key-words:

Registros de representação semiótica; congruência semântica; apreensões em geometria; aprendizagem em matemática.

Introdução

A matemática guarda uma forte dependência das formas de representações e da manipulação dos seus objetos. A história mostra vários exemplos em que determinadas noções só puderam alcançar um certo nível de desenvolvimento a partir do momento em que uma notação adequada foi criada. É o caso, por exemplo, da situação encontrada com os precursores gregos da moderna geometria analítica, entre eles Menæcmus: "Foram as deficiências das notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas." (Boyer, p.70).

Em matemática, recorre-se a uma grande variedade de representações semióticas, sendo algumas delas desenvolvidas para efetuar tratamentos bem específicos. Uma outra razão para se ter esta grande variedade de registros de representação é que, na visão tanto de Piaget quanto de Vygotski, as representações semióticas preenchem um papel decisivo na aprendizagem.

Devido a estas características de ensino e de aprendizagem em matemática é que a escola se preocupa em elaborar e criar novas formas de representação. Cabe, então, a questão: para um determinado conceito em matemática, existe uma boa representação que leve de forma suficiente à sua compreensão?

A resposta para esta questão é não. A seguir, daremos algumas indicações para compreender este "não" bastante enfático tomando por base a teoria de Raymond Duval. Para este autor, o *trânsito* entre as mais diversas representações possíveis de um mesmo objeto matemático em questão é que assume importância fundamental. O *custo* cognitivo desse trânsito vai depender em muito da noção, chamada por ele, de congruência *semântica* que trataremos mais adiante.

Para Duval, no lugar de nos preocuparmos em descobrir o que é uma "boa representação", é preferível substituir esta busca pela compreensão do que representam a congruência semântica e o trânsito entre as representações na aprendizagem em matemática.

Registros de representação e congruência semântica

Um artigo em Frege (1971)[2] fez com que se notasse que expressões, por exemplo, como "a estrela da manhã" e "a estrela vespertina" que embora tivessem a mesma referência (o planeta Vênus), tinham sentidos diferentes, asseverou-se importante para o ensino em matemática como assinala Duval:

> "A distinção entre sentido "Sinn" e referência "Bedeutung" mostrou-se ser uma das mais fecundas em todos os domínios nos quais a relação entre conceito e idéias efetua-se através da manipulação de signos, símbolos ou expressões. Esta distinção induziu a separar com clareza a significação, que depende do registro de descrição escolhido, da referência que depende dos objetos expressos ou representados." (Duval, 1988a, p.7).

Em matemática esta separação é fundamental. Por exemplo, 1, 3-2, 4/4 e 5^0 referem-se ao mesmo número, ao mesmo objeto matemático, a mesma referência. No entanto, os objetos nestas distintas representações, não possuem o mesmo significado operatório. Um aluno, por exemplo, pode reconhecê-lo em 3-2, mas pode não fazer o mesmo em 5^0 ou em 4/4.

"A distinção entre sentido e referência está estreitamente ligado ao princípio da substituição, que é essencial nos procedimentos de cálculo ou de dedução: duas expressões tendo a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou fórmula, sem que o valor da verdade mude." (Duval, 1988a, p.7).

Por exemplo, para efetuar $1+\frac{1}{4}$, podemos fazê-lo da forma seguinte:

$$\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

Esta mesma operação poderia ser feita ainda de outra forma, mantendo-se a mesma referência:

$$1+\frac{1}{4} = 1+0{,}25 = 1{,}25$$

[2] "Sentido e denotação" Publicado em Zeitschrft für Philosophie und philosophisphe Kritik (100), 1892. (Nota de rodapé do tradutor de Frege (1971)).

Na primeira solução nos mantivemos na mesma rede semiótica de representação, enquanto que no segundo caso, há uma mudança de sistema de representação.

1 e 4/4 são as "estrelas matutina e vespertina" de Frege referidas anteriormente da mesma forma que 1/4 e 0,25.

As transformações de 1 em 4/4 e de 1/4 em 0,25 não possuem a mesma natureza cognitiva. Para um certo tipo de transformação o custo cognitivo pode ser maior ou menor, dependendo em muito do que Duval chama de *congruência semântica* entre as duas expressões ou objetos matemáticos, com a mesma referência, a serem transformados. Tal noção será apresentada através de vários exemplos esclarecedores mais adiante.

Hipótese fundamental de Duval

A questão seguinte: a que corresponde a existência de vários registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para a funcionamento do pensamento humano? Proposta por Duval (1993, p. 49) e respondida por ele mesmo da seguinte maneira:

- **primeira resposta**: economia de tratamento.

Tendo vários registros de representação é possível haver mudança entre eles e estas mudanças poderão ser mais econômicas e potencializadas. Tendo mais registros, há um aumento potencial de possibilidades de trocas e, por conseguinte, há um aumento também na escolha mais econômica.

Comparemos, por exemplo, o problema, adaptado de Duval (1999, p. 19) proposto a alunos do Collège[3], para determinar o denominador na expressão a seguir, problema este em que a maioria dos alunos não conseguiu resolver:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{?}$$

A solução do problema descrito agora com os números na forma decimal

$$0,5 = 0,250 + 0,125 + 0,100 + 0,20 + ?$$

torna-se até banal. Sem muita dificuldade podemos obter 0,005 ou, passando para a forma fracionária, 1/200.

[3] Sistema de ensino básico francês compõe-se do PRIMAIRE com 5 anos: CP, CE1, CE2, CM1 e CM2; o COLLÈGE com quatro anos: Sixième (11-12 anos), Cinquième (12-13 anos), Quatrième (13-14 anos) e Troisième (14-15 anos) e o LYCÈE com 3 anos: Seconde, Première e Terminale.

- **segunda resposta:** a complementaridade dos registros.

Esta resposta está baseada fortemente nas possibilidades que um tipo de sistema semiótico pode oferecer. Bresson[4] citado por Duval (1993, p. 49, 50).

Por exemplo, a linguagem discursiva não oferece as mesmas possibilidades que podem oferecer uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados.

Consideremos as diferentes representações cartesianas da mesma parábola

(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y + 1 = (x - 2)^2$

(c) $y = (x - 3)(x - 1)$

(d) esboço da parábola no plano cartesiano

Cada uma dessas representações possui, em sua integralidade, as mesmas informações do objeto matemático referido. No entanto, do ponto de vista cognitivo, um certo de tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma: em (c) vemos com clareza as raízes; em (b), as coordenadas do vértice da parábola; em (d), uma representação em um sistema semiótico diferente dos anteriores e que em muitas vezes é bastante adequada à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado. Nesta mesma forma, no entanto, não temos com precisão, por exemplo, o valor de $y(\sqrt{2})$ e devemos recorrer a uma das formas anteriores para obtê-lo.

Sobre esta questão, da pluralidade das representações, escreve ainda Duval:

> "As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas caraterísticas do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado." Duval (1999, p. 18).

Esta última frase de Duval nos remete ao "não" respondido claramente à questão inicialmente formulada: Para um determinado conceito em matemática, existe uma boa representação que leve de forma suficiente à sua compreensão?

- **terceira resposta:** a conceitualização implica em uma coordenação de

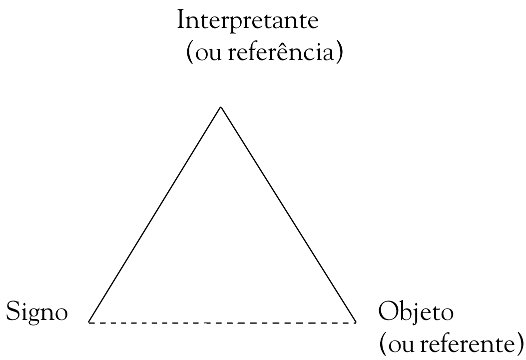
[4] Bresson, F. Les fonctions de Représentations et de communication. Psychologie (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckard). Encycl. de la pleïade, 1987.

diferentes registros de representação.

Do ponto de vista genético, as representações mentais e as semióticas não podem estar situadas em domínios distintos. Como assinalam Piaget[5] e Vygotski[6] citado por Duval (1993, p. 38-39): "o desenvolvimento das representações mentais se efetua como uma interiorização das representações semióticas do mesmo modo que as imagens mentais são uma interiorização dos perceptos."

A isto, podemos acrescentar que a pluralidade de sistemas de representação permite uma diversificação de representação de um mesmo objeto o que aumenta as capacidades cognitivas do sujeito e consequentemente potencializa as suas representações mentais.

Para Pierce (2000, p. 46), "Um *signo*, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém." Este signo cria na mente do receptor um segundo signo denominado de *interpretante* que pode ser mais desenvolvido do que o primeiro. A coisa representada recebe o nome de *objeto*. Estas três formam uma relação triádica de signo, proposta por Ogden & Richards[7] citado por Netto (2001, p. 56) da forma esquematizada a seguir



Em relação a esta apresentação de Pierce, escreve Duval:

> "Observemos que esta definição minimalista vale também para as imagens mentais quanto para os signos (os símbolos matemáticos), ou para as fotografias e para as palavras da língua! Esta definição em razão de sua generalidade, não faz diferença entre o que é mental (por exemplo, lembrar-se de...) e o que é material (fotografias tomadas com ajuda de um auto-foco). Esta definição pode parecer pobre mas ela permite prontamente distinguir a REPRESENTAÇÃO e o OBJETO que ela representa. É esta distinção, e não somente a noção de representação que é fundamental para a análise do conhecimento, uma vez que ela mostra imediatamente duas questões: relativas a sua relação e a sua não confusão." Duval (1999, p. 15-16).

Pierce (2000, p. 51-55) classifica os signos em várias tricotomias (inicialmente

[5] Piaget, J. La formation du symbole chez l'enfant. Neuchatel. Delachaux&Niestlé. (1946), 1968.

[6] Vygotski, L. S. Thougtht and Langage. (T. Hanfmann&Vakar). Cambridge, M.I.T (1932), 1962

[7] Ogden, C. K. e Richards, I. A. O significado de significado. Rio de Janeiro: Zahar, 1972.

três e mais tarde chegou a dez). Aquela que relaciona o signo com o seu objeto, ele distingue: ícone (que possui traços comuns com o objeto), índice (cuja relação com o objeto é direta, causal) e símbolo (que designa o seu objeto independente de qualquer semelhança ou de relações causais, é o signo arbitrário cuja ligação com o objeto é fruto de uma convenção).

Sobre esta classificação, escreve Duval (1999, p. 16): "Isto quer dizer que não se pode falar de representação sem precisar a natureza da relação de representação. Mas a qualificação de Peirce é muito fraca porque ele não leva em conta os sistemas que produzem a representação."

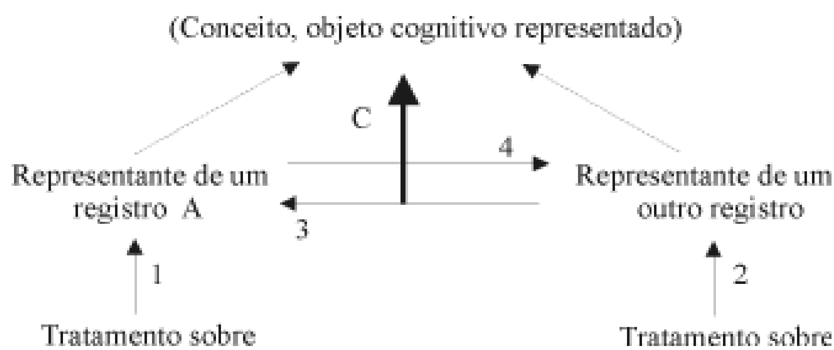
Em relação a estas suas duas últimas observações, Duval assinala ainda:

> "Lembremos que não se deve confundir o conteúdo explícito da representação e o objeto representado: uma vez que este conteúdo depende em um primeiro momento do sistema que permite produzir a representação e não do objeto. É somente com os sistemas físicos e orgânicos que o objeto tem uma relação de causalidade com a representação produzida, jamais com os sistemas semióticos." Duval (1999, p. 16).

Chegamos ao ponto de enunciar a hipótese fundamental de aprendizagem formulada por Duval:

"A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão." Duval (1993, p. 51).

Tal hipótese é representada por Duval pelo esquema seguinte:



Este esquema retrata o caso mais simples de coordenação entre dois registros de representação. As flechas 1 e 2 correspondem as transformações internas a um registro de representação, as 3 e 4 as transformações externas, ou seja, as conversões por mudanças de registros. A flecha C corresponde a que Duval chama de compreensão integrativa de uma representação que supõe uma coordenação de registros. As flechas pontilhadas correspondem a distinção clássica de Saussure (1973) entre representante e representado.

A coordenação entre dois registros quaisquer se dá através de duas operações: *conversão* e *tratamento*. O termo conversão é utilizado por Duval para denotar as transformações de registros de representações semiótica quando há mudança de sistema de representação e em referência a um mesmo objeto matemático. A representação no plano cartesiano de funções do tipo $y = ax + b$ é uma atividade de conversão. Transformar uma frase, como faremos nos problemas a seguir, em equações matemáticas é também uma atividade de conversão. No entanto, resolver, por exemplo, uma equação do tipo $2x - 6 = 4$, da forma seguinte:

$$
\begin{aligned}
2x - 6 = 4 \quad & \Leftrightarrow 2x - 6 + 6 = 4 + 6 \\
& \Leftrightarrow 2x = 10 \\
& \Leftrightarrow x = 5
\end{aligned}
$$

é uma atividade caracterizada por Duval como sendo do tipo *tratamento*, pois as transformações mantêm-se em uma mesma rede semântica.

Os problemas de não-congruência tornam-se, em geral, mais agudos nas transformações do tipo conversão.

Exemplos iniciais

A seguir faremos uma exploração em vários exemplos em que, na coordenação entre registros, intervêm de forma decisiva a noção de congruência semântica.

Exemplo 1: o caso da passagem de uma frase para uma fórmula adaptado de Duval (1988b, p. 18) no problema seguinte:

Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, 31 anos a menos do que seu pai. A soma das idades das três pessoas é 119 anos. Calcule as idades.

Designando por h a idade do homem e f a idade do filho e em relação apenas a primeira frase (Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho) podemos escrever uma equação de forma referencialmente congruente com esta frase do seguinte modo:

$h - 23 = f$ (A idade do homem menos 23 é igual a idade do filho)
ou ainda
$h = f + 23$ (A idade do homem é igual a idade do filho mais 23)

Observemos que estas três frases:

Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho,
A idade do homem menos 23 é igual a idade do filho,
A idade do homem é igual a idade do filho mais 23,
dizem a mesma coisa, ou seja, elas têm a mesma referência.

No entanto, a equação: h + 23 = f
h: um homem
+ 23: tem 23 anos a mais
= f do que seu filho

que é *semanticamente congruente* com a primeira frase do enunciado e que não tem a mesma referência com esta mesma frase corre o risco de se impor como a sua descrição algébrica e consequentemente explicar o insucesso de muitos alunos na resolução deste problema.

Exemplo 2: um outro exemplo, nesta mesma linha (passagem de uma frase para uma fórmula), tratado em Moretti (1999, p. 44, 45) nos problemas seguintes.

Problema 1: João Ricardo foi ao mercado com 15 reais e gastou 7 reais na compra de um pacote de arroz. Com quantos reais ele ficou?

Os vários elementos presentes no enunciado do problema ("gastou" sugere a operação de subtração e a ordem com que aparecem os números 15 e 7) favorecem a boa solução 15 - 7.

Problema 2: João Ricardo foi ao mercado com 15 reais e comprou um pacote de arroz. Chegando em casa ele viu que ainda tinha 8 reais. Quantos reais ele gastou?

Aparentemente a boa solução 15 - 8 não é favorecida diretamente pelo enunciado deste problema. No entanto, a solução:

15 reais = valor do pacote de arroz + 8 reais

se parece mais com o enunciado do problema, e nada mais é do que:

15 reais - 8 reais = valor do pacote de arroz

No primeiro problema há congruência semântica entre discurso e formulação matemática, em que a subtração entendida como uma diferença é exigida. Já no segundo problema há um menor grau de congruência semântica, sendo a subtração entendida como operação inversa da adição que é requerida.

Exemplo 3: assimetria no nível de acerto nas conversões entre registros de representação.

Em Duval (1995, p. 53) uma tabela extraída de uma experiência do próprio autor[8] mostra o nível de acerto na conversão *texto ↔ expressão algébrica* nos sentidos direto (texto → expressão algébrica) e inverso (expressão algébrica → texto).

[8] Duval, R. La compréhension du langage mathématique par un enfant de quatrième. *Langage marthématique e formalisation*. Bordeaux: coloque inter-IREM. 1971.

Na primeira linha desta tabela (que contém cinco linhas) consta o seguinte:

Texto: A soma de dois produtos de dois inteiros, todos inteiros sendo diferentes[9].

Expressão algébrica: a.b + c.d

Neste caso, o nível de acerto foi de 90% nos dois sentidos.

Na segunda linha desta tabela há a situação seguinte:

Texto: O produto de um inteiro pela soma de dois outros[10]

Expressão algébrica: a.(b + c)

O nível de acerto cai sensivelmente de forma aproximada nos dois sentidos: da passagem *texto* → *expressão algébrica* é de 71% enquanto que para a passagem *expressão algébrica* → *texto* é de 74%.

Finalmente, na terceira linha desta tabela encontramos a situação seguinte:

Texto: A soma dos produtos de um inteiro com outros dois inteiros[11].

Expressão algébrica: a.b + a.c

O nível de acerto da passagem *texto* → *expressão algébrica* é de 48% enquanto que para a passagem *expressão algébrica* → *texto* sobe para 87%, ficando quase que no mesmo nível da situação encontrada no primeiro caso.

A noção de congruência semântica esclarece o porquê que questões aparentemente parecidas produzem resultados tão surpreendentemente diferentes.

Exemplo 4: Na determinação de funções inversíveis, uma das condições é que a função seja injetora.

Para essas funções, temos as seguintes definições: seja uma função f real e x1, x2 dois valores quaisquer do seu domínio. Para que f seja injetora, podemos completar a sua definição de dois modos:

(a) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ou

(b) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

[9] La somme de deux produits de deux entiers, tous les entiers étant différents.

[10] Le produit d'un entier par la somme de deux autres.

[11] La somme des produits d'un entier avec deux autres entiers.

A definição (a) é equivalente a definição (b) – uma é a contra-positiva da outra – são referencialmente congruentes e, no entanto, não possuem o mesmo significado.

De fato, para provar que a função real $f(x) = x^2$ não é injetora., a forma (a) é semanticamente congruente com o tipo de tratamento a ser implementado, que no caso da função dada, podemos utilizar, por exemplo, dois pontos distintos $x_1 = 2$ e $x2 = -2$, aplicar na função e obter $f(2) = f(-2) = 4$, para concluir que f não é injetora.

No entanto, para provar que a função real $f(x) = 2x + 5$ é injetora, a definição (b) é a forma com maior congruência com o tipo de tratamento a ser utilizado:

$$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Este exemplo deixa bem claro o papel que desempenham as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, elas aumentam a capacidade dos alunos na resolução de problemas.

Exemplo 5: Na mesma linha do exemplo anterior, podemos citar as definições equivalentes de módulo de um número real:

a) $$|x| = \begin{cases} x, & \text{se x} \geq 0 \\ -x, & se \text{ x} < 0 \end{cases}$$

ou

b) $$|x| = \sqrt{x^2}$$

A definição (a) é mais congruente do que a definição (b) com a idéia de valor absoluto. Além disso, a passagem entre elas não é tão evidente assim.

Para determinar, por exemplo, $|-5|$ pela forma (a), teríamos

$$|-5| = -(-5) = 5$$

que é uma solução bastante congruente com a definição (a) e com a idéia de módulo de um número. No entanto, na forma (b) teríamos a solução

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

que apela para outras propriedades "estranhas" à idéia de valor absoluto.

Para calcular, por exemplo, o problema de limite seguinte:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{1-x}}}{x+5}$$

poderíamos iniciar a solução dividindo tanto o numerador quanto o denominador da fração por:

$$x = -|x| = -\sqrt{x^2}$$

uma vez que x $\rightarrow$ -∞, inspirados na definição (b) de módulo. Deste modo, teríamos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{1-x}}}{x+5} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{1-x}}}{-\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x+5}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{1-x}}{x^2}}}{1+\dfrac{5}{x}}$$

e assim por diante até chegar a solução final que é -1.

Exemplo 6: o exemplo a seguir é citado em Chevallard (1991, p. 93).

Uma função com uma expressão do tipo, por exemplo, $x^4 - 5x^2 + 8x + 3$ é reconhecida pela maioria dos alunos como polinomial. No entanto, o mesmo não se pode dizer da função com a seguinte lei:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), & \text{se x} > 0 \\ \sqrt{-x}\left(-x\sqrt{-x} - \dfrac{1}{\sqrt{-x}}\right), & \text{se x} < 0 \\ -1, & \text{se x} = 0 \end{cases}$$

que nada mais é do que a função polinomial de expressão $x^2 - 1$.

Além de questões relativas à congruência semântica, este exemplo também evidencia um tipo de ensino centrado apenas em uma forma de representação.

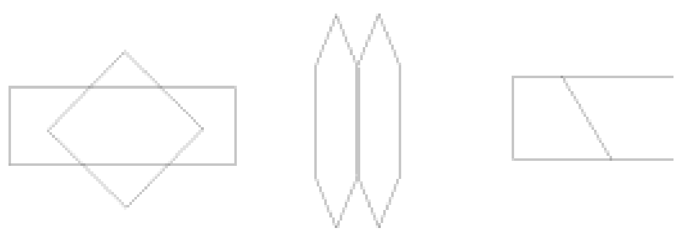
Os tipos de apreensões em geometria

Duval (1988b) destaca quatro tipos de apreensões na resolução de problemas em geometria: apreensão perceptiva, apreensão operatória, apreensão discursiva e apreensão seqüencial de figuras. Esta última é requerida em exercícios de construções geométricas ou na reprodução de figura.

Sobre a apreensão perceptiva, ele escreve:

> "Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e, uma outra, controlada e tornando possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses" Duval (1988b, p. 58).

Assim, como exemplifica Duval (1988b, p. 59), as três figuras a seguir, da esquerda para a direita aparecem prioritariamente como:



. a superposição de duas formas, um quadrado e um retângulo;

. uma montagem de duas formas que se tocam;

. a repartição de uma forma, um retângulo, em duas partes.

As figuras geométricas não possuem um estatuto de registro autônomo, conforme assinala Duval:

> "...as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem, cada vez, do que é dito no enunciado como hipótese. Isto implica numa subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como conseqüência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra, à primeira vista, a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de uma certa maneira, um fragmento do discurso teórico. Os elementos e as propriedades que aparecem sobre a figura têm, não mais do que o estatuto e a certeza das asserções correspondentes no discurso geométrico, o qual é comandado por definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura, do ponto perceptivo, pode, deste modo, ser uma figura geométrica diferente se modificamos o enunciado das hipóteses." Duval (1988b, p. 69).

A apreensão discursiva é bastante requerida em atividades de demonstração. "De fato, a verdadeira representação correspondente a uma atividade de demonstração em geometria não será uma figura, mas uma rede semântica de propriedades e de objetos." Duval (1988b, p. 71).

A apreensão operatória diz respeito às possíveis modificações que uma figura pode permitir e as reorganizações perceptivas que estas mudanças operam. "A produtividade heurística de uma figura, em um problema de geometria, está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto." Duval (1988b, p. 62).

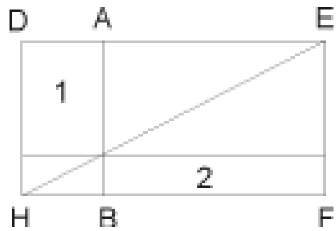
A reconfiguração intermediária é uma importante modificação relacionada com a apreensão operatória.

Exemplos em geometria

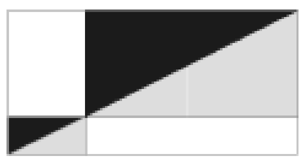
A seguir apresentamos alguns exemplos para discutir vários tipos de apreensões em geometria.

Exemplo 7: O problema de Euclides apresentado em Duval (1995, p. 199-202).

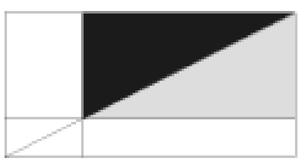
Mostrar a igualdade das partes 1 e 2.



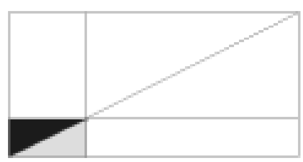
Este problema pode ser resolvido por supressão dos triângulos DEH e EHF de duas configurações intermediárias não-convexas e iguais:



ou pela supressão sucessiva de duas partes elementares iguais:



seguido de

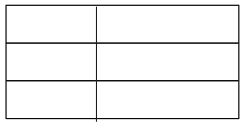


Estes procedimentos, observados em alunos de 10 a 13 anos em Mesquita[12] citado por Duval (1988b, p. 65), mostram a resolução de um problema em geometria usando várias vezes reconfiguração intermediária.

[12] Mesquita, A. Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. Educationnal Studies in Mathematics, 20, 55-77. 1989b.

Exemplo 8: na coordenação entre discurso e figura em geometria, um exemplo de Balacheff[13] citado por Duval (1988b, p. 61) é o seguinte:

Quantos retângulos têm nesta figura?



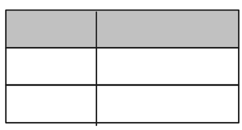
Na figura, os retângulos podem ser considerados como:

. elementos de um "ladrilhamento". Os pequenos retângulos são vistos como unidades elementares.

. interseção de duas bandas. Neste caso é preciso ver as unidades figurais de forma retilíneas e abertas. Para isto é preciso prolongar os segmentos traçados.

. conjunto de quatro pontos. Neste caso é preciso apagar os segmentos, deixando apenas os pontos.

A lei gestáltica de fechamento da figura impõe um retângulo maior subdividido em pequenos retângulos, como elementos de um ladrilhamento, o que pode levar os alunos à resposta: a figura contém 6 retângulos, não incluindo, por exemplo, o retângulo hachurado seguinte:



De fato, Balacheff[14] constata: "... é o primeiro tipo de solução que domina as observações clínicas que nós fizemos, tanto antes quanto durante a experiência. Provavelmente porque a solução corresponde a uma abordagem perceptiva da figura."

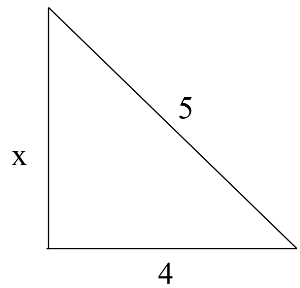
Balacheff citado por Duval (1988b, p. 62).

[13] Balacheff, N. Preuve et démonstrations en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques. v3.3, p.261-303, 1992.

[14] Idem.

Exemplo 9: É proposto em Mello (1999, p. 65) o problema seguinte:

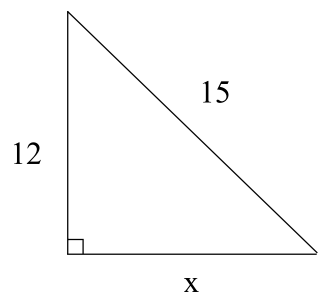
Calcule os valores possíveis de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.



Os alunos são compelidos, pela apreensão perceptiva da figura, à aplicação do teorema de Pitágoras: a visão marcante de um "triângulo retângulo", subordina o tipo tratamento a ser empreendido. Dois fatores exercem esta forte influência: a posição do triângulo que sugere fortemente um ângulo reto em uma posição bastante privilegiada (com lados horizontais e verticais) e os valores x, 4 e 5 que lembram a tríade 3, 4 e 5 pitagórica conhecida de muitos alunos, sobrepujando o que está expresso na formulação da questão "Calcule os valores possíveis de x ...".

No problema seguinte, ainda em Mello (1999, p. 67).

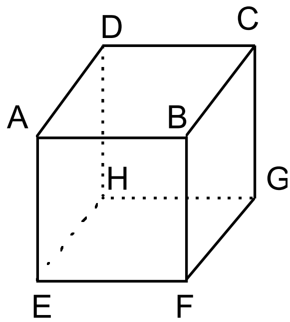
Calcule o valor de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.



a apreensão perceptiva conduz, como seria previsível, aqueles que conhecem o teorema de Pitágoras, à sua aplicação no triângulo retângulo.

Tanto em um caso como no outro a percepção da figura é decisiva no tipo tratamento empreendido.

As posições verticais e horizontais fortemente privilegiadas no ensino, levaram apenas 81 alunos de 392 alunos do 1º ano do ensino médio (21%) a reconhecerem, no triângulo CBF a seguir, um triângulo retângulo. Relatório Capes-Cofecub (1996).



'No cubo acima, o triângulo CBF é retângulo? ( ) Sim ( ) Não

Numa apreensão puramente perceptiva, um ângulo reto é reconhecido como a interseção de uma vertical com uma horizontal.

Os problemas em geometria tornam-se mais complexos, mesmo aqueles com aparência simples, pelo fato de existir uma tríplice apreensão na resolução desses problemas. A apreensão perceptiva pode ser determinante e subordinar as demais apreensões.

Considerações Finais

Os problemas relacionados com a congruência permitem um novo olhar sobre a questão da linguagem em matemática. Problemas aparentemente semelhantes podem ter níveis de acerto tão distantes um do outro que sem uma análise que leve em conta esta noção torna-se difícil compreender as razões deste distanciamento.

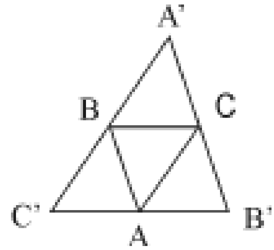
Para finalizar, descreveremos um exemplo de Dupuis et al.[15] citado por Duval (1995) que é bastante esclarecedor sobre o papel da noção de congruência em matemática na compreensão da performance na resolução de problemas em matemática.

Um problema é proposto a um grupo de alunos de troisième (14-15 anos) com as seguintes versões:

[15] Dupuis, C., Duval, R., Pluvinage, F. Etude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième. *Géometrie au premier cycle*. II, 65-101, p.75-78. Paris: A.P.M.E.P., 1978.

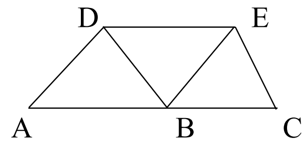
Versão 1

A'C' e AC são paralelas
A'B' são paralelas
B'C' são paralelas
Provar que A é o meio deB'C'



Versão 2

ABED e BCED são paralelogamos
Provar que B é meio de AC



Para resolver esse problema, nas duas versões, mobilizamos os mesmos conhecimentos matemáticos. Na versão 2 (a mais congruente, pois fala-se em paralelogramos e na figura podemos vê-los facilmente), o nível de acerto é um pouco maior do que 50%, enquanto que, na versão 1 (a não congruente, uma vez que o texto faz referência a retas paralelas e na figura o que podemos perceber de imediato são vários triângulos), o nível de acerto fica próximo de 10%, uma diferença bastante significativa nestas duas versões do problema.

Para uma parte dos alunos foi proposto, no mesmo questionário, as duas versões do problema: primeiro a versão 2 e, em seguida, a versão 1. Os autores da pesquisa revelam: mais impressionante do que a diferença observada anteriormente no nível de acerto é que: um pouco menos da metade dos alunos que resolveu corretamente o problema na versão mais simples (versão 2), não conseguiu reconhecer os dois paralelogramos na versão não congruente. Dupuis et al[16] citado por Duval (1995, p. 184).

A julgar por estes resultados, para alguns alunos, temos o mesmo problema em versões distintas enquanto que para outros, simplesmente, os problemas são distintos. Conforme assinala Duval (1995, p.183), na versão 2, o problema é mais fácil do que na versão 1, não do ponto de vista matemático, mas do ponto de vista cognitivo.

Duval possui ainda muitos outros escritos a respeito da demonstração em matemática e da compreensão de textos. A variedade dos assuntos, os temas em várias teses de doutorado de seus alunos (por exemplo, Guzman Retamal (1990), Lemonidis (1984), Mesquita (1989a), Padilla Sanchez (1992), Pavlopoulou (1993), Rommevaux (1997)) realizadas na Universidade Louis Pasteur em Estrasburgo, atestam a fecundidade da sua obra.

[16] Idem.

Referências

Boyer, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo - Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

Capes/Cofecub n. 174/95. **Relatório das atividades referentes ao período de junho de 1995 a agosto de 1996.** UFSC-ULP, 1996.

Duval, R. **Ecarts sémantiques et cohérence mathématique**. Annales de didactique et de sciences cognitives, v 1, p. 7-25. 1988a.

Duval, R. **Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence.** Annales de didactique et de sciences cognitives, v 1, p. 57-74. 1988b.

Duval, R. **Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da la pensée.** Annales de didactique et de sciences cognitives, v 5. 1993.

Duval, R. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

Duval, R. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** RDM, v 16, n 3, p. 349-382. 1996.

Frege, G. **Écrits logiques et philosophiques**. Trad. Claude Imbert Paris: Seuil, 1971.

Gusman Retamal, I. del C. **Le role des representations dans l'appropriation de la notion de fonction**. Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur, 1984.

Lemonidis, E. Charalambos. **Conception, réalization et résultats d'une experience d'enseignement de l'homotetie.** Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur. 1984.

Melo, E. G. S. de. **Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria.** Tese de mestrado. PUC-SP, 1999.

Mesquita, A. **L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie :** éléments pour une typologie. Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur. 1989a.

Moretti, M. T. **Dos sistemas de numeração às operações básicas com números naturais**. Florianópolis: Comped, INEP e Editora da UFSC, 1999.

Netto, J T. C. **Semiótica**. 5. ed. São Paulo: Editora perspectiva, 2001.

Padilla Sanchez, V. **L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques.** Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur. 1992.

Pavlopoulou K. *Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire:* la coordination des registres de représentation. Annales de didactique et de sciences cognitives, n. 5, 1993.

Pierce, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

Rommevaux, M. **Le discerniment des plans:** un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle. Strasbourg: Thèse-Université Louis Pasteur. 1997.

Saussure, F. de. **Cours de linguistique générale**. Paris: Payot, 1973.