OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO COMO FERRAMENTA DO PENSAMENTO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE FUNÇÃO LINEAR

ROBERTA NARA SODRÉ DE SOUZA[1]
MARIA HELENA CORDEIRO[2]

[1] Mestranda do Programa de Pós Graduação Mestrado em Educação da Univali. E-mail: roberta@cehcom.univali.br

[2] Professora Drª do Programa de Pós Graduação Mestrado em Educação da Univali. E-mail: mhcordeiro@hotmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo identificar as estratégias utilizadas por alunos do 2º ano do Ensino Médio, na resolução de problemas que envolvem o conceito de função linear. A investigação de campo foi realizada aplicando-se um questionário com diversas situações-problema em uma turma de 24 alunos de uma escola particular. A análise multidimensional dos dados coletados mostrou cinco grupos de sujeitos, de acordo com as estratégias utilizadas: os que predominantemente resolveram os problemas por operações numéricas elementares; os que resolveram somente por regra de três; os que resolveram somente por conversão para outro registro; os que desenvolveram estratégias diversas e os que quase não apresentaram estratégias de resolução. Foi verificado, também, que, quando os sujeitos utilizam registros de representação relacionados ao conceito de função linear, o fazem, preferencialmente, nas linguagens algébrica e tabular, mostrando maiores dificuldades na utilização da linguagem gráfica. Neste artigo são levantadas algumas implicações educacionais destes resultados.

Abstract

This study aims to identify the strategies used by high school students to solve problems involving the concept of linear function. A questionnaire composed by several problems was answered by 24 students of a private school. The multidimensional data analysis generated five groups according to the strategies used by the students: those who solved the problems by using elementary numerical operations; those who used the rule of three method; those who carried out the treatment and conversion of a representation; those who adopted mixed strategies and those who didn't apply any efficient strategy. It was also observed that most representacional records produced by the students were carried out in either the algebraic or the tabular language. This article raises some of the educational implications of these findings.

Palavras-chave:

Função linear, registros de representação, situações-problema.

Key-words:

Linear function, registers of representation, problem solving.

Introdução

A relação existente entre a variação de dois ou mais conjuntos coloca-se em várias situações de nossas vidas. Por isso, o conceito de função toma um lugar de extrema importância entre todos os conceitos matemáticos desenvolvidos pelos alunos adolescentes no Ensino Médio. Não se restringindo à disciplina de matemática, a noção de função está presente em conceitos físicos, químicos, nas pesquisas, nos jornais, em artigos de revistas e, por isso, é base para o desenvolvimento conceitual de diversas disciplinas do currículo escolar e contribui para a leitura e estabelecimento de elos e conexões dedutivas, pelo indivíduo, na relação com o meio em que vive.

Considerando a relevância do conceito de função nas diversas situações cotidianas, temos sido confrontados com as dificuldades encontradas pelos alunos do ensino médio ao lidarem com esse conceito, o que nos levou a buscar as respostas para o seguinte problema:

Que estratégias são prioritariamente utilizadas como ferramentas na resolução de problemas que envolvam o conceito de função linear, por adolescentes que cursam o segundo ano do Ensino Médio?

Limitamos nossa investigação ao conceito de função linear, porque uma investigação sobre o conceito de função, por envolver um campo conceitual muito amplo, extrapolaria os recursos disponíveis para esta pesquisa.

Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos

A construção de uma estrutura conceitual de um conhecimento científico, seja ele sobre a função linear ou não, apoia-se sobre a operacionalidade do mesmo. Vergnaud (1996), pontua que um conceito adquire este status quando ele é operatório, ou seja, por meio dele é possível tratar numerosas classes e situações, entre elas as que nunca foram encontradas. Assim, ele se constrói numa articulação entre a estrutura do conceito, as diferentes situações em que ele pode estar inserido e as diferentes formas de representá-lo.

Um conceito mostra-se operacional, não somente pela operação em si, mas sim pelo fato de que, nas operações, que envolvem transformações, esquemas e invariantes, reestruturam-se conceitos anteriores, permitindo um trânsito entre diferentes situações. A operacionalidade característica de um conceito mobiliza diferentes representações simbólicas, diferentes ações do sujeito sobre situações e diversos subconjuntos de esquemas[3]. Os diversos tipos de problemas propostos pelo professor no ensino regular são fontes para fazer evoluir as concepções dos alunos, já que podem ser catalisadores do movimento entre situações, significados e significantes, que formam o conceito em si. Isto acontece principalmente se os problemas propostos se inserem em situações pouco familiares, o que dificulta sua resolução pelos sujeitos (Vergnaud,1985).

Essa idéia também é encontrada em Inhelder (1996, p. 21), quando pontua que "...construir uma estrutura ou inventar um procedimento supõe a assimilação de dados e esquemas e, conseqüentemente, uma atribuição de significações. Enfim, as inovações de procedimentos contribuem para a formação de estruturas operatórias." Como afirma Nunes (1997), a criança desenvolve significados de um conceito a partir de diferentes situações que são representadas por símbolos; estes são carregados de significados construídos pela criança na relação com o meio e possibilitarão a ela resolver problemas.

[3] Nem toda operação de pensamento irá necessariamente mobilizar todos os esquemas existentes.

Assim, como acontece em relação a outros conceitos científicos, a conceitualização dos objetos matemáticos, que compreende os significados, os significantes e as situações, contribui para o processo de formação desses objetos em nossas mentes. Objetos matemáticos são conceitos descontextualizados e formulados de maneira mais geral possível, reconhecidos socialmente (na comunidade científica), mas que se originaram nos instrumentos conceituais criados pelos matemáticos para resolução de problemas específicos (Douady,1986).

Dada a generalidade e descontextualização dos objetos matemáticos, sua manipulação só é possível por meio da criação de sistemas simbólicos que os representem. Esses sistemas de representação exprimem algumas propriedades dos objetos matemáticos. Duval (1993) caracteriza essas representações como representações semióticas, que são externas e conscientes aos indivíduos, constituídas pela utilização de signos, que vão além da comunicação de idéias para o desenvolvimento das representações mentais, já que, para o autor, estas são a interiorização da percepção externa. Alguns sistemas semióticos são considerados registros de representação e desempenham um papel fundamental nessa conceitualização dos objetos matemáticos.

De acordo com Duval (1993), um registro de representação é uma representação semiótica que permite três atividades cognitivas: 1) a formação de uma representação identificável que selecione as relações do conceito que serão representadas; 2) o tratamento, que permita a transformação interna ao registro em que se formou e 3) a conversão ou transformação externa, ou seja, para outro registro de representação.

Dessa forma, os registros de representação que possuímos de um determinado conceito, por meio dos quais vamos estabelecer comunicação não somente com o meio, mas também com nossos próprios esquemas, tornam-se essenciais na apreensão e no desenvolvimento dos objetos matemáticos em nossa estrutura cognitiva. Esse desenvolvimento permite que esses objetos passem a ser utilizados como instrumentos na resolução de problemas. Segundo Douady (1986, p. 10) "um conceito é um instrumento quando focalizamos o nosso interesse sobre o uso que ele faz para resolver um problema."

Nesse sentido, Nunes (1997, p.31) afirma que, em relação aos sistemas simbólicos, "... ser numeralizado significa pensar matematicamente sobre situações. Para pensar matematicamente, precisamos conhecer os sistemas matemáticos de representação que utilizaremos como ferramentas[4]. Estes sistemas devem ter sentido, ou seja, devem estar relacionados às situações nas quais podem ser usados."

Segundo Astolfi (1995), o uso dos símbolos na resolução de problemas é mais do que a aplicação mecânica de um código sobre uma situação, é suscitar uma variedade de formas de representação gráfica dos resultados, além de uma discussão sobre o valor de cada um deles e a clareza de seus significados para o indivíduo.

[4] Neste artigo, estaremos considerando o termo "ferramentas" como sinônimo do termo "instrumentos".

A criança desenvolve significados de um conceito a partir de diferentes situações que são representadas por símbolos; estes são carregados de significados construídos pela criança na relação com o meio e possibilitarão a ela resolver problemas (Nunes, 1997). Os esquemas acessados na realização de atividades revelam a estruturação interna de um indivíduo (Inhelder, 1996). Uma das formas de percebermos traços dos esquemas é por meio da ação sobre as diferentes situações, já que estas suscitam significados[5] nas estruturas internas, que são expressos nas formas de representação e de linguagem que utilizam, que seriam os significantes[6].

Ao desenvolver situações-problema diversas, que trazem informações em diferentes linguagens, o aluno procura traduzi-las naquelas que ele já consegue utilizar como uma ferramenta de tratamento da situação. Como cada linguagem traduz algumas, mas não todas, as propriedades do objeto, uma linguagem pode ser mais adequada que outra para lidar com esse objeto, em uma situação específica. Desta forma, o conhecimento dos alunos sobre os objetos e suas propriedades é ampliado por meio do trânsito entre representações expressas em diferentes linguagens, as quais se tornam ferramentas para o pensamento no desenvolvimento de situações-problema.

Regine Douady (1986) utiliza o termo "quadro" para se referir ao conjunto de objetos, relações, formulações e imagens mentais que compõe um ramo da matemática. Em sua teoria, propõe que, por meio das mudanças de quadros, os sujeitos podem obter formulações diferentes de um problema, conseguindo possivelmente elaborar um novo caminho diante das dificuldades inicialmente encontradas quando da sua resolução, implementando ferramentas e procedimentos que não são dados na formulação original do problema. Essas mudanças enriquecem o quadro no qual o problema foi apresentado e viabilizam a construção de novos objetos matemáticos pelos sujeitos. É na relação alternada dos conceitos matemáticos como instrumentos na resolução de problemas e como objetos na construção do conhecimento que os sujeitos dão sentido aos saber científico e fazem evoluir suas concepções (Douady, 1986).

Percebemos, assim, que os registros de representação de um objeto matemático, neste caso a função linear, carregam consigo uma rede de relações, outros objetos, outras formulações, outras imagens mentais. Dessa forma, observamos como os sujeitos que conseguem operar com a mudança de registros de representação na resolução de problemas possivelmente ampliam sua significação do objeto, já que esse trânsito entre diferentes registros implica em uma mudança de quadros.

[5] São os invariantes, as inferências, regras de ação e a predição de cada sujeito em estudo (Vergnaud, 1985).

[6] Dizem respeito aos sistemas simbólicos desenvolvido pelos sujeitos , como: a linguagem, os gestos, desenhos, tabelas , linguagem algébrica, etc... (Vergnaud, 1985).

Encaminhamento da investigação

Sujeitos

Participaram da pesquisa 24 alunos do 2º ano do Ensino Médio de um colégio privado de Itajaí. A média de idades desses alunos era de 15,62 anos e desvio padrão de 0,90 anos.

Instrumento

Foi utilizado um questionário com 27 questões que consistiam na resolução de problemas matemáticos envolvendo o reconhecimento, o tratamento e a conversão entre os registros de representação de funções lineares. O instrumento de pesquisa foi elaborado com base nas categorias definidas por Hitt (1988; 2001), que correspondem a uma organização da construção conceitual, em ordem crescente de precisão e complexidade. São elas:

Categoria A: mostra idéias imprecisas do conceito; apresenta uma mistura incoerente de diferentes representações;
Categoria B: reconhece os elementos de um sistema semiótico de representação em relação a um objeto matemático;
Categoria C: realiza tratamentos dentro de um mesmo sistema de representação;
Categoria D: realiza conversão de um sistema semiótico no outro;
Categoria E: manipula diferentes sistemas semióticos, numa relação recíproca entre eles;
Categoria F: possui estruturas matemáticas dentro do conceito em questão, permitindo assim, em situações problema, identificar aspectos incoerentes.

Neste artigo, apresentaremos os resultados de nossa investigação com base na resolução de problemas. Desta forma, são considerados somente os problemas que exigiam, para sua resolução, o uso de estratégias a serem selecionadas pelo sujeito (vide abaixo):

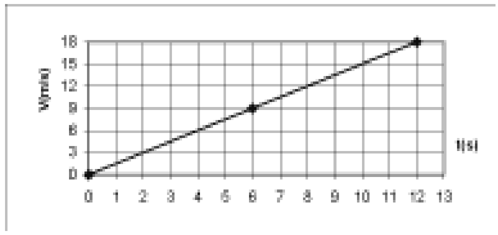
1. Uma micro-empresa que fabrica laticínios gasta 5 litros de leite para produzir um quilo de queijo. (enunciado da questão 1.1 até a 1.3)

1.1. Se a empresa precisasse fabricar 66 quilos de queijo, quantos litros de leite seriam necessários, já que para cada 5 litros de leite ela produz um quilo de queijo? (escreva todos os registros do que estiver pensando até chegar a sua conclusão)___________________

1.2. Com 950 litros de leite, quantos quilos de queijo poderão ser fabricados, já que para cada 5 litros de leite ela produz um quilo de queijo? (escreva todos os registros do que estiver pensando até chegar a sua conclusão) ___________kg

1.3. Se a empresa só começa a ter lucro com uma venda superior a 90 quilos de queijo, a partir do consumo de quantos litros de leite a empresa começará a ter lucro, já que para cada 5 litros de leite ela produz um quilo de queijo? (escreva todos os registros do que estiver pensando até chegar a sua conclusão)

2. Observe a relação existente entre a velocidade e o tempo de um carro em movimento e responda o que se pede (gráfico válido para as questões 2.1 a 2.3):



2.1. Qual a velocidade do carro quando t=20 segundos, no gráfico velocidade X tempo acima? ______ (redija todos os seus cálculos)

2.2. Qual a velocidade do carro quando t=0 segundos, no gráfico velocidade X tempo acima? _______ (redija todos os seus cálculos)

2.3. Em quanto tempo o carro passa a ter uma velocidade de 80 m/s, no gráfico velocidade X tempo acima?_________ (redija todos os seus cálculos)

3. A tabela abaixo indica o custo de produção de um certo número de peças para o computador, observe as informações e complete no quadro os espaços em branco, e ao lado registre suas anotações:

Nº peças	Custo R$
5	9
8	14.4
	117
2	

4. A distância(km) que um carro percorre em função do tempo(h) pode ser dada por :
d=80t, com d e t E R^+ (este problema será utilizado do item 4.1 ao 4.3)

10.4. Após 72 horas qual será a distância percorrida pelo automóvel, já que desenvolve um percurso mantendo a função d=80t? (descreva seus cálculos)_____________km

10.5. Qual o tempo que o automóvel levou para percorrer uma distância de 4160 quilômetros, já que desenvolve um percurso mantendo a função d=80t? (descreva seus cálculos)__________h

10.6. Para que valores de t, a distância percorrida será maior que 480 quilômetros, já que desenvolve um percurso mantendo a função d=80t ? (descreva seus cálculos)_________________________

Procedimentos

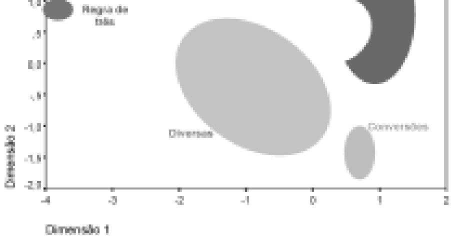
Foram realizadas três sessões de 20 minutos cada, para que a resolução dos problemas apresentados não se tornasse demasiadamente cansativa. As sessões foram realizadas dentro da sala de aula, utilizando-se parte do horário previsto para as aulas de Matemática.

Resultados

A análise multidimensional dos dados produzida pelo MDS do programa SPSS destacou cinco grupos de sujeitos, de acordo com as estratégias utilizadas (fig. 1):

1. O primeiro grupo, de 6 sujeitos, destaca-se dos demais pelo número maior de estratégias em que são usadas somente as operações numéricas elementares, como a multiplicação e a divisão. Além disso, a distância para os outros grupos traduz também o não uso da regra de três como estratégia de resolução
2. O segundo grupo de 5 alunos se aproxima mais do primeiro por algumas poucas estratégias desenvolvidas utilizando operações numéricas; contudo, é um grupo com bastantes dificuldades em adotar estratégias de resolução de problemas eficazes.
3. O terceiro grupo, de três sujeitos, distingue-se pelo predomínio de estratégias que envolvem o tratamento e a conversão entre os registros de representação da função linear e pelo não uso de regra de três e operações elementares na resolução de problemas.
4. O quarto grupo, formado por apenas um sujeito, apresenta-se bem diferenciado dos demais já que utiliza como estratégia de resolução apenas a regra de três, desenvolvendo os 11 problemas desta forma.
5. O quinto e maior grupo, com 9 sujeitos, forma-se mais próximo ao quarto grupo pois a regra de três é utilizada freqüentemente como estratégia pelos sujeitos do grupo. Este grupo se diferencia dos três primeiros por usar diversas estratégias de resolução como o tratamento, principalmente o algébrico, e algumas conversões, além da regra de três. Pontuamos, também, que se encontra mais afastado do primeiro grupo por nenhum dos sujeitos apresentar as operações elementares como estratégia de resolução.

Figura 1: Diagrama produzido pela análise MDS do pacote estatístico SPSS, mostrando o agrupamento dos sujeitos em função da semelhança de estratégias utilizadas na resolução dos problemas.



Além dos grupos acima caracterizados, podemos perceber que:

- Em todas as estratégias aonde foi observada uma conversão, ela se deu na maior parte das vezes para a linguagem algébrica;
- Quando o problema foi dado na linguagem verbal, as estratégias utilizadas com maior freqüência foram a regra de três, as operações elementares e a conversão verbal-algébrica;
- Quando o problema foi dado na linguagem gráfica, as estratégias de resolução utilizadas foram a conversão gráfico-algébrica e a regra de três;
- Quando o problema foi formulado na linguagem tabular, a resolução aconteceu com maior freqüência por tratamento tabular e conversão tabular-algébrica;
- Quando o problema foi formulado com a função sendo representada pela linguagem algébrica, a estratégia de resolução mais utilizada foi o tratamento algébrico, e, em segundo lugar, mas numa proporção bem menor, a forma numérica;
- A resolução de problemas dados na linguagem gráfica apresentou bastantes dificuldades, sobretudo quando existia a necessidade de conversão para outros registros, ou transposição para além dos dados ali apresentados. Foi constatado que quinze alunos apresentaram respostas incorretas ou questões não respondidas, quando a forma de apresentar os dados se dava nessa linguagem.

Dentre os 24 sujeitos de nossa investigação, apenas três não utilizaram nem tratamento, nem conversão, na resolução dos problemas.

Considerações Finais

Apesar dos sujeitos desta pesquisa terem apresentado diversas estratégias na resolução de problemas envolvendo o conceito de função linear, foi verificado que o uso de conversões entre diferentes registros de representação nem sempre é utilizada como estratégia prioritária. Pelo contrário, é muito freqüente o uso de estratégias "menos sofisticadas", no sentido que foram aprendidas pelos sujeitos em fases anteriores da escolaridade (Ensino Fundamental), como é o caso das operações numéricas elementares e do algoritmo da regra de três. Entretanto, não é possível atribuir o escasso uso de conversões a uma dificuldade dos sujeitos em lidar com esse tipo de estratégia. Como a função linear se refere a uma relação de proporcionalidade, é bem possível que o uso dos algoritmos já aprendidos se torne mais econômico. Neste sentido, é interessante ressaltar que essa relação de proporcionalidade foi identificada sobretudo em situações-problema apresentadas na linguagem verbal e, em menor escala, na linguagem gráfica. Nos problemas apresentados nas linguagens tabular e algébrica a regra de três quase não foi utilizada. É necessário investigar se, nestes casos, existe uma dificuldade dos sujeitos em identificar uma relação de proporcionalidade entre as variáveis envolvidas. Também é necessário esclarecer se, ao identificarem uma relação de proporcionalidade, os sujeitos reconhecem que estão diante de uma função linear ou se consideram os dois conceitos (proporcionalidade e função linear) como totalmente dissociados um do outro.

Outra questão que exige maior investigação se refere à resolução de problemas apresentados na linguagem algébrica. O sucesso no uso do tratamento algébrico nessas situações reflete uma compreensão das relações entre as variáveis envolvidas ou apenas traduz um aprendizado descontextualizado de procedimentos de resolução de equações algébricas? O surgimento destas questões aponta para a necessidade de novos estudos enfocando o tema "função".

No que se refere às implicações educacionais deste estudo, é importante ressaltar que não obtivemos evidências de que os estudantes de ensino Médio investigados estejam familiarizados com o trânsito entre diferentes registros de representação enquanto ferramenta na resolução de problemas. Se considerarmos esse trânsito como um dos meios que permitem a ampliação do conceito, podemos suspeitar que a concepção de função linear já desenvolvida pelos estudantes investigados ainda é bastante restrita. Entretanto, deveremos ser cautelosos devido à limitação que foi exposta acima, em relação ao fato dos problemas envolvendo função linear serem problemas de proporcionalidade e, portanto, poderem ser resolvidos com a utilização de estratégias mais econômicas, como a regra de três.

Por outro lado, as dificuldades dos estudantes em lidarem com problemas apresentados na linguagem gráfica aponta claramente para a necessidade de se discutir o uso dessa linguagem no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As dificuldades observadas permitem supor que esta linguagem esteja sendo pouco considerada, não só nas aulas de matemática como, provavelmente, também nas outras disciplinas.

Referências

ASTOLFI, J**. A didática das ciências/Jean-Pierre Astolfi, Michel Develay**. Tradução Magda S. S. Fonseca 4. ed. Campinas, SP: Papirus,1995.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **RDM**, 7.2, p. 5-31, 1986.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de Science Cognitives.** Strasbourg: IREM-ULP,1993.

HITT, F. Dificulties in the articulacion of different representations linked to the concept of function. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(1), 1998.

______. Construction of mathematical concepts and cognitive frames. **www.matedu.cinvestav.mx/ 2001**

INHELDER, B. **O desenrolar das descobertas da criança:** pesquisa acerca das microgêneses cognitivas. Trad: Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas,1996.

NUNES, T. **Crianças fazendo matemática**. Trad: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas,1997.

VERGNAUD, G. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação**. trad. Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. Revista Psychologie Française, n. 30-3/4 nov.1985.

______. La théorie dês champs conceptuels. **RDM,** 10 (2-3), 133-170, 1990.

______. A formação de competências profissionais. In: **Revista do GEEMPA**. p. 64-65,1996.