REFLEXÕES ACADÊMICAS

A GÊNESE DA COMPOSIÇÃO ADITIVA E DAS RELAÇÕES ARITMÉTICAS DE PARTE E TODO

CÉLIA FINCK BRANDT[1]
IDEMAR VIZOLLI[2]

Introdução

Na escola, é preciso verificar: se as crianças quantificam as coleções extensivamente (permanência do todo) e não somente intensivamente (mais, alguns ou nenhum) e se elas têm capacidade de estabelecer a composição aditiva, tanto das classes como nos conjuntos numéricos, estes se diferenciam das classes, pois as partes são de mesma natureza – homogêneas. De acordo com Piaget (1975 p. 274), "existe um ritmo regular de interações entre os dois movimentos complementares de análise dos elementos e de síntese, assinalados pela enumeração e a totalização".

Estas conclusões têm importantes implicações para a educação matemática, principalmente porque na escola, as crianças manipulam seqüências numéricas, recitam e escrevem números, sem compreensão e, muitas pesquisas têm tratado das dificuldades que as crianças apresentam para compreender o sistema de numeração na representação de quantidades.

As provas clínico-críticas podem servir para provocar certos avanços para a aprendizagem, o que não significa que os professores e professoras devam aplicá-las sistematicamente, sem analisar suas implicações. As provas servem como ponto de partida ao processo ensino-aprendizagem para que os professores e professoras intervenham, de forma a contribuir com o avanço no desenvolvimento cognitivo dos alunos e alunas.

[1] Doutoranda em Educação Científica e Tecnológica pela UFSC – Florianópolis-SC. Professora da Universidade Estadual de Ponta Grossa-Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino. E-mail: brandt@bsi.com.br

[2] Professor membro da equipe padagógica EGA/ Univali e doutorando da UFPR. E-mail:

O "Método clínico crítico" proposto por Piaget

O método é um instrumento que possibilita analisarmos a fase de desenvolvimento em que o sujeito se encontra. Ele é composto por uma série de provas acerca de problemas previamente delimitados pelo pesquisador ou pesquisadora. As provas se caracterizam por uma série de conversações livres com a criança, para saber como ela raciocina, como ela descobre novos instrumentos[3]. Esse método é importante à educação na medida em que serve para fazermos um diagnóstico de partida sobre noções lógicas em desenvolvimento no sujeito em processo de aprendizagem. A aplicação das provas pode fornecer uma série de indicativos que possibilitam, aos professores e professoras, a proposição de atividades que auxiliem as alunas e os alunos a desenvolver novos conceitos e ampliar suas estruturas cognitivas.

"A aprendizagem é provocada pelas situações – provocadas por um experimento psicológico; ou um professor, com respeito a algum tema didático; ou por uma situação externa." (Piaget, 1964, p. 176). Concebendo que a aprendizagem é provocada pelas situações, a própria aplicação de uma "prova clínico-crítica" se constitui num momento propício de aprendizagem, uma vez que o entrevistado ou entrevistada se depara com desafios cognitivos com os quais tem que confrontar, contrapor, e/ou mesmo refutar suas hipóteses. Daí a importância do pesquisador ou pesquisadora estar atento não só às respostas dadas isoladamente, mas também às reações, argumentos e contra-argumentos que os sujeitos da pesquisa utilizam para defender ou refutar suas hipóteses.

Segundo Piaget (1977), as estruturas "se constroem por interação entre as atividades do indivíduo e as reações do objeto." (Piaget, 1977, p. 56). O desenvolvimento das estruturas cognitivas sofre influências do meio em que o sujeito está inserido. Não é algo estanque, pronto e acabado, assim como não ocorrem da mesma forma e de dentro de mesmas faixas etárias, mas ocorrem sempre na mesma ordem.

O trabalho que desenvolvemos nos instiga a (re)pensar nossa postura frente ao processo ensino-aprendizagem de Matemática.

[3] Para obter mais informações, vide Piaget (1977). A referência completa encontra-se na bibliografia consultada.

A Composição aditiva das classes e dos números e as relações da classe e do número

Piaget e Szeminska (1975), procuram examinar como a construção do número se completa pela descoberta das operações de adição e multiplicação de classes que são de natureza lógica. Isso significa compreender a relação de inclusão entre o todo e as partes. Sendo um conjunto A e suas partes B e C, a descoberta da adição vai implicar o reconhecimento de que um elemento do conjunto A possui a propriedade a e, simultaneamente as propriedades b do subconjunto B ou c do subconjunto C.

As operações de adição já se encontram inseridas na própria construção dos números naturais uma vez que cada número, exceto o zero, é a adição de mais *um* ao anterior e compreende a correspondência biunívoca entre duas coleções que por sua vez envolve multiplicação. Esses autores acreditam que o número, além de ser solidário às operações de classes (relações lógicas) ele também é solidário às operações qualitativas, isto é, o número e a classe como complementares e a se desenvolver solidariamente.

As raízes das operações aditivas e multiplicativas estão associadas ao fato de que o número é constituído pelas operações aditivas que possibilita reunir as partes esparsas num todo e de conceber o todo como decomposto nestas partes. Trata-se da lógica das classes na relação de inclusão entre o todo e as partes e que, no número, as partes são de mesma natureza que o todo homogêneo, em função das qualidades comuns aos elementos de um conjunto dado. Mesmo não se sabendo a quantidade de elementos de um conjunto uma quantificação intensiva intervém, uma vez que é sempre possível estabelecer que tem mais no todo que nas partes.

As relações quantitativas podem se situar, a princípio, no plano intuitivo, não sendo suscetível de um tratamento operatório, o que vai acontecer por fases.

As provas piagetianas têm como objetivo compreender como estas noções são constituídas de modo a mostrar como a classe e o número procedem do mesmo mecanismo operatório do agrupamento. Elas permitem verificar a composição aditiva das classes na sua forma mais elementar: $A = B + C$, donde $B = A - C$ e $B < A$ ou ainda $C = A - B$ e $C < A$, sendo A, a classe total, B e C as classes inclusas. Como as provas se mostraram difíceis às crianças de menos idade, elas foram reformuladas em termos mais intuitivos de modo a permitir a apreensão da diferença entre A e B ou A e C.

Como a composição aditiva implica a relação $B = A - C$ ou $C = A - B$, o todo não é somente caracterizado pelas suas qualidades, mas também pela qualidade de suas partes que se multiplicam; isto é, se os elementos de um todo possuem a qualidade a e os elementos de uma de suas partes possuem a qualidade b ou c, então um elemento do todo terá a qualidade ab ou ac, assim como o elemento da subclasse. Se a relação não estiver estabelecida, então o todo se dissolve e o elemento da parte possuirá somente a qualidade b ou c, uma vez que ele está dissociado do todo A.

O primado da quantificação global se impõe sobre a quantificação operatória, dependendo da fase em que o sujeito se encontra. Neste caso a manifestação do sujeito pode ser interpretada de acordo com as três fases elencadas. Para ilustrar, quando uma parte A1 de um todo A é comparada a um outro todo B ou C, face à avaliação global, ao invés da operatória, o sujeito, ora pende para o todo B, ora para a parte A1 proveniente de um todo mais numeroso A. Esta avaliação não é operatória porque permanece no plano intuitivo, julgando que o todo quando esgotado, é maior que a parte de um outro todo, não esgotado, ou ainda, o todo não esgotado é maior, pois o resíduo o torna mais numeroso.

A relação de inclusão entre o todo e as partes consiste, portanto, num ato de coligação, que assegura a permanência do todo, e constitui a fração do todo em suas partes em se tratando de campos numéricos ou na constituição das classes em extensão. A relação de inclusão se estabelece somente quando o sujeito concebe tanto a multiplicação lógica como a composição aditiva. Elas são interdependentes.

Vamos agora conversar com as crianças?

As três crianças foram entrevistadas no mês de abril do corrente ano, pelos professores pesquisadores. São elas: M(7;7)[4] e E(6;6), residentes em Portal do Paraná, PR e freqüentam o segundo ano do 1º Ciclo do Ensino Fundamental; Na(5;9), residente em Navegantes, SC e freqüenta turmas de escola de Educação Infantil.

É importante registrar que as entrevistas foram gravas em fita K7 e depois transcritas. Face as limitações do artigo, registramos no protocolo, partes das entrevistas feitas com as crianças.

A primeira prova

A primeira prova constituiu de uma coleção de frutas, composta de maçãs e laranjas (classe lógica definida em termos puramente qualitativos) – classe A e as suas subclasses B e C, composta por laranjas e maçãs (partes da coleção A também definidas em termos qualitativos). Perguntou-se se havia mais elementos na classe A que nas classes inclusas B e C e as possíveis variações em relação ao todo e as partes e vice versa.

[4] A ou as letras antes dos parênteses foram atribuídas aleatoriamente para resguardar a identidade da criança. Já os números colocados dentro dos parênteses, referem-se a idade das crianças, (anos; meses).

A segunda prova

A segunda prova foi uma coleção de cartas coloridas (classe lógica definida em termos puramente qualitativos) – classe M e as suas subclasses N e O, composta por cartas vermelhas e cartas azuis (partes da coleção M também definidas em termos qualitativos). Perguntou-se se havia mais elementos na classe M que nas classes inclusas N e O e as possíveis variações em relação ao todo e as partes e vice versa.

Para avaliar as respostas das crianças a fim de verificarmos as fases em que cada uma delas se encontrava, estabeleceu-se alguns critérios, que, de acordo com as características de cada uma das fases elencadas por Piaget (1975), foi possível categorizar as respostas dadas às provas aplicadas.

Os critérios de avaliação foram os seguintes:

. Há sempre mais elementos na classe A que nas subclasses B e C;

. O papel da linguagem;

. A comparação da parte com o resíduo do todo e a comparação das partes com o esquecimento do todo;

. A possibilidade de se colocar em relação, do ponto de vista quantitativo de inclusão de duas classes em extensão, A = B + C em contraste com a possibilidade de sua compreensão dos elementos da coleção do ponto de vista qualitativo, ou seja, das propriedades dos elementos da classe (A) e de suas subclasses (B) e (C), quando esses se tornavam outra coleção, com suas respectivas propriedades multiplicativas (ab ou ac);

. Em relação ao número, se a criança reconhecia dedutivamente ou operatoriamente, estabelecia que a classe de ordem A contém mais elementos que as subclasses inclusas, ou seja, que A > B ou A > C após a visualização e não por antecipação, isso, ao pensar no número preciso de elementos das subclasses e, ao contar as quantidades;

. Se a criança compreende que a classe A é mais numerosa que as subclasses inclusas e coloca de antemão que A = B + C e B = A – C ou C = A – B.

A transcrição de partes dos diálogos com as crianças permitirá que analisemos de forma mais sistemática, as respostas, para verificarmos em que fase de desenvolvimento cognitivo cada uma das crianças entrevistadas se encontra.

Prova 1 – M(7;7)
Vou por aqui na tua frente, maçãs e laranjas. (...) tudo isso, o que são? –
(Criança): Laranjas e maçãs[5].
Como se chama tudo isso junto?
(Criança): *Frutas...*
Tem mais frutas ou mais laranjas, o que você acha?
(Criança): *Mais frutas*.
Por quê existem mais frutas que laranjas?
(Criança): *Porque frutas são todas e laranjas são só laranjas*.

[5] As frases em itálico são as respostas que as crianças deram às perguntas.

Prova 2
(Entrevistador e entrevistado combinaram que as cartas de baralho azuis e vermelhas seriam chamadas de cartas coloridas e quando ao se referir a uma das cores, falar-se-ia a cor) – Eu tenho cartas coloridas ou cartas azuis? – *Coloridas*. – Por quê? – *Porque coloridas é todas. Todas são cartas. Azuis são só azuis*. – (...) Você vai fazer uma fila só com as cartas vermelhas e eu vou fazer uma fila com as cartas azuis e vermelhas. Qual vai ser mais comprida. As minhas ou as tuas? – *As tuas*. – Por quê? – *As tuas são todas. As minhas são só as vermelhas*. (Dando seqüência, pegou-se fichas azuis vermelhas e pretas ...) Uma menina que fazer uma fila com as fichas coloridas. Ela tem que pegar só as vermelhas? – *Não*. – Por quê? – *Porque coloridas são as azuis, vermelhas, pretas. Daí é colorida*. – Qual será mais comprida, a fila das vermelhas ou das coloridas? – *Coloridas*. (...)

Prova 1 – E(6;6)
" Nós temos aqui, laranjas e maçãs. Todas juntas o que são? – *Frutas*. (...) Existe em cima da cama, mais frutas ou mais laranjas. O que você acha? – *Mais laranja*. – (...) Se eu levar todas as frutas embora, vai sobrar alguma fruta? – *Não*. – Por quê? – *Porque vai levar todas*. – (...) Se a sua irmã levar todas as frutas embora, ficam laranjas? – *Fica*. – Tem certeza? – (...) *Não*. (...) Uma criança da tua idade não disse que tinha mais frutas. O que você acha, tinha mais frutas ou tem mais laranjas? – *Mais laranja*. Prova 2 –"Eu tenho várias cartas de baralho sobre a cama. Que cores de cartas eu tenho? *Azul e vermelha*. – Tem mais cartas ou tem mais azul? O que você acha? – *Tem mais cartas*. – Tem mais cartas ou tem mais vermelhas? – *Tem mais vermelha*. – E por quê tem mais vermelhas? (fica contando e insiste que tem mais cartas vermelhas) – Você sabe por quê? – *Não*.

Prova 1– Na(5;9)
"– O que nós temos aqui? – *Maçã e laranja*. – Tudo junto, o que a gente chama? – *Laranja e maçã*. – Tudo junto? – (Pensa, olha para as frutas e com a ajuda do pesquisador fru) *Frutas*. – Tudo isso aqui, o que é então? – *Fruta*. – (...) Nós temos, mais laranjas ou mais maçãs? – *Laranja*. – Por quê tem mais laranjas? – *Porque tem seis e maçãs só tem quatro* (conta os elementos de cada subclasse, um a um). – Se eu tirar as maçãs, sobram frutas? – *Não*. - Por quê? – *Porque sobram as laranjas*. – E se eu levar as laranjas, sobram frutas? – *Não*. – (...) A (sua irmã) disse que se eu levar as maçãs sobrarão frutas. O que você acha disso: ela tem razão? – *Vão sobrar as laranjas*. (...)"

Análises

Observando os critério de avaliação, percebeu-se que M(7;7), estabelece de saída que a classe A é mais números que a subclasse inclusa B e estabelece por via operatória que A = B + C e B = A – C ou C = A – B. Em relação a segunda prova, também compreende que a classe M é mais numerosa que as subclasses N e O, no plano operatório. Seu pensamento é reversível e admite que N + O = M e que N = M – O ou O = M – N. Do ponto de vista multiplicativo, concebe as cartas vermelhas como sendo, ao mesmo tempo N e cartas M, o que leva a N = MN, sendo n, a qualidade de ser vermelha e m a qualidade de ser carta, então os elementos de N são mn e, ao se falar de vermelhas, é por abstração da qualidade vermelha obtida pela inversa da multiplicação de classes: N = MN : M ou n = mn : m. Como M(7;7) apresentava composição aditiva através da ação operatória, acreditamos que se encontra na fase operatória.

E(6;6), não consegue pensar simultaneamente no todo e nas partes. Quando em presença de contra-argumento, não oscila. Quando o todo é dividido em suas partes B e C, o todo se dissipa e somente as partes são comparadas entre si. Por isso sempre argumenta que existem mais laranjas mesmo que outra criança possa ter dito que havia mais frutas. Neste caso, a criança não consegue conservar o todo, deixando-se guiar por uma avaliação global que é rígida e não se dissipa.

As respostas dadas às perguntas da segunda prova oscilam entre respostas que demonstram a ausência da composição aditiva e respostas que revelam a presença da composição aditiva, corrigindo-as após intervenções de natureza empírica. A visualização da situação que contradiz o que foi antecipado, fazia a criança mudar de idéia, ao mesmo tempo em que não sabia o porquê daquela resposta que conseguia ver. Tais constatações nos levaram a acreditar que esta criança se encontra numa fase intermediária, uma vez que estabelecia a composição aditiva das classes ainda no plano intuitivo.

Na(5;9), manifestou incapacidade de incluir as partes num todo mais geral. O todo e as partes não são pensados simultaneamente. A classe A (frutas) e as subclasses B e C (laranjas e maçãs) foram concebidas como classes independentes, com suas qualidades próprias. Em nenhum momento as partes foram concebidas como inclusas. Isso nos levou a acreditar que a criança se encontrava na fase não-operatória.

Considerações Finais

Ao aplicar as provas procuramos nos certificar da fase em que o sujeito se encontrava, levando em conta o papel da linguagem e da percepção. Para uma criança conservadora, as provas acabaram por se tornar enfadonhas, em compensação, na fase intermediária, os contra-argumentos e as contra-provas auxilia-as a alterar seu julgamento, embora essa alteração seja pontual e imediata. Por outro lado, os auxílios nada podem significar, se a criança se encontra em fase de ausência de conservação. Neste caso, embora a criança possa observar que há conservação, sua conclusão inicial permanece inalterada.

A natureza das perguntas, os critérios de avaliação dos desempenhos apresentados pelas crianças e pelos próprios entrevistadores e as pistas que poderiam induzi-las a dar uma determinada resposta revelaram-se, para nós, questões importantes a serem observadas ao aplicar provas clínicas.

Com relação à da gênese da noção, pudemos compreender a importância da síntese da coligação e da numeração, necessárias, para que a criança chegue ao nível operatório que define o número. Mesmo concebendo a totalidade e a qualidade dos elementos pertencentes às coleções, há necessidade da coligação do todo com a seriação dos elementos, para a construção progressiva do conceito de número e das operações de composição aditiva e multiplicativa.

Compreendendo-se as noções e o que está em sua gênese, pode-se organizar um ambiente educacional que estimule os alunos e alunas para que as coordenações aos avanços das fases possam ser estabelecidas.

Embora possa apresentar o início da numeração falada, não significa que a criança esteja compreendendo a adição, que é resultante da composição aditiva. É da coligação e da enumeração que permite a criança chegar ao nível operatório, quando define o número propriamente dito.

Referências

MORO, M. L. F. **Aprendizagem Operatória:** A Interação Social da criança. São Paulo: Cortez; Autores associados: [Curitiba]; Scientia et Labor, 1987.

BRINGUIER, J. **Conversando com Jean Piaget.** 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1993.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. **A Gênese do Número na criança.** 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, Brasília: INL, 1975.

PIAGET, J. Desenvolvimento e aprendizagem. Taduzido de Jean Piaget. Journal of Research. In: **Science Teaching**, XI, n. 3, 1964, p. 176-186.