

OLHAR EM PERSPECTIVA: análise da representação do espaço e suas implicações na visualização de figuras tridimensionais no ensino de geometria¹

CLÁUDIA REGINA FLORES ²
MÉRICLES THADEU MORETTI ³

¹ Este artigo é parte das reflexões para a realização da tese de doutoramento a ser defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFSC.

² A autora é doutoranda do PPGE/CED/UFSC, Mestre em Educação pelo PPGE/CED/UFSC, professora de matemática do Colégio de Aplicação/CED/UFSC e bolsista do CNPq. E-mail: clau@labcal.mtm.ufsc.br

³ O co-autor é Doutor em Didática da Matemática pela Universidade Louis Pasteur, França, e professor do Departamento de Matemática/CFM e PPGE/CED, PPECT/CFM/UFSC. E-mail: mericles@mtm.ufsc.br

Resumo

É unanimidade entre pesquisadores em educação matemática que a visualização de figuras bidimensionais e tridimensionais é muito complexa para uma grande maioria de alunos. É sobre este ponto, da dificuldade de olhar e a ler as figuras geométricas, que este trabalho pretende refletir. Procuramos, deste modo, compreender a problemática da representação do espaço no mundo artístico da renascença, embasados em aspectos filosóficos e/ou epistemológicos, procurando compreender que os modos de ver são culturais, de uma época e que eles interagem com os modo de representação espacial. Cremos que a análise da história do processo do desenho em perspectiva mostra-se necessário particularmente na educação matemática, uma vez que as práticas educativas estão fundamentadas na cultura, nos modos de aprendizagem e nas tradições.

Abstract

It is unanimous among researchers in the field of mathematical education that for most students the visualization of two-dimensional and three-dimensional images is very complex. It is this specific aspect – the difficulty to visualize and read geometrical images – that this paper intends to explore. Our aim is to discuss the complexity of space representation in the artistic world of the

renaissance, based on philosophical and epistemological aspects, trying to understand to what extent the ways of seeing are culturally-determined and context-specific and how they interact with the forms of spatial representation. We understand that the analysis of the history of the perspectival representation process is necessary especially in mathematical education, since educational practices are also based on culture, on ways of learning, and on tradition.

Palavras-chave:

Desenhando em perspectiva, representação espacial, visualização espacial.

Introdução

Nesta última década, diversas pesquisas em Educação Matemática apontam para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento da habilidade de visualização⁴. Isto porque há um reconhecimento da importância de se compreender a percepção das informações visuais, tanto para a formação matemática do educando quanto para sua educação global.

As pesquisas realizadas por Mesquita (1989) e Padilla (1992) procuraram chamar a atenção para o papel heurístico das figuras geométricas planas na resolução de problemas matemáticos, comprovando que sua utilização exige um “aprender a ver e a ler” estas figuras.

Em particular, na dissertação em Bolda (1997), preferimos métodos didáticos⁵ que privilegiassem o desenvolvimento da visualização de figuras geométricas planas em problemas de cálculos de áreas. A visualização foi considerada fundamental para ampliar a visão intuitiva e global, bem como, para a compreensão das outras áreas da matemática, além de ser uma questão complexa que deveria ser melhor estudada. Constatamos que, em torno desta habilidade, existem dificuldades e bloqueios que estão centrados, basicamente, em dois pontos:

“1) em ver a figura, (...), vê-la a partir de todas as possibilidades que ela pode oferecer;

2) em se apropriar desta leitura, ter apreendido a capacidade de leitura de figuras, neutralizando fatores que possam interferir na busca errada da solução do problema”.

Parece-nos que tais dificuldades não seriam decorrentes apenas do exercício da visualização de figuras geométricas planas. Certamente, em torno da utilização de figuras tridimensionais na resolução de problemas matemáticos, uma complexidade de fatores diversos iriam interferir na visualização.

Na resolução de problemas de geometria, em particular de geometria tridimensional, evoca-se, simultaneamente, dois passos: “*ver e raciocinar*” (Rommevaux, 1997, p. 5). Então, para ajudar na visualização das figuras tridimensionais e

⁴ Mesquita (1989), Padilla (1992), Bolda (1997), Rommevaux (1997), Pais (1994), Kaleff (1996), Cavalca (1998) entre alguns outros.

⁵ Refere-se a operação figural chamada reconfiguração. A utilização desta operação em figuras planas, com o objetivo de calcular áreas destas figuras, fez-se essencial, em sua pesquisa, por dois motivos: 1) permitiu uma exploração sistemática de todas as configurações; 2) permitiu uma análise do poder heurístico de uma figura para um determinado problema.

encontrar a solução de um problema matemático, recorre-se ou a figuras que são representações em perspectiva (bidimensional) ou a representações materiais (tridimensionais). Contudo, lidar com figuras tridimensionais, sejam elas representadas em maquetes ou desenhadas em perspectiva num papel, constitui-se numa grande problemática para a maioria dos alunos⁶.

Quando da utilização de figuras tridimensionais para resolver problemas geométricos, a especificidade da atividade geométrica, diz Duval (1995), está justamente na complexidade que existe entre a coordenação dos registros de representação presentes na atividade de leitura e interpretação destas figuras. Isto não consiste somente na integração e na relação entre os dois registros⁷ de representação, mas requer um tratamento que vai ao encontro da articulação entre as dimensões bidimensionais e tridimensionais.

Mas, por que tanta dificuldade em olhar figuras no espaço? Para responder esta questão talvez fosse necessário ir muito mais além, ou seja, ir mesmo no cerne onde se encontra toda a problemática da representação de objetos do espaço. Ir no ponto onde se encontra exatamente o nó da leitura e interpretação de toda construção geométrica tridimensional. Assim, vamos nos deparar com uma outra questão: “*como representar a profundidade, o relevo, que nossa visão binocular é capaz de apreciar, numa imagem ‘disfarce’ sobre uma superfície plana?*” (Bessot e Le Goff, 1993, p. 199). Ou seja, estamos nos perguntando como desenhar em perspectiva.

A palavra perspectiva tem muitas significações. Porém, o sentido atribuído aqui é aquele que diz respeito a arte de representar os objetos sobre um plano tais como se apresentam no espaço, ou seja, à vista. Na Antiguidade, os significados atribuídos ao termo perspectiva era, no grego, *ciência da visão* e, no latim, *discernir claramente*. Por toda Idade Média, a palavra perspectiva continuava significando a *ciência da visão*. Na Renascença, a perspectiva passou a ser considerada como o conjunto de especulações e técnicas referentes à representação racional do espaço.

⁶ Tanto Rommevaux (1997), Pais (1994) como Kaleff (1996), constataam que uma das grandes dificuldades dos alunos em lidar com as figuras do espaço está na associação da leitura do desenho em perspectiva com o objeto físico, bem como a produção do desenho.

⁷ A geometria tridimensional envolve dois registros de representação semiótica: o registro figural e o da linguagem natural. Este último é indispensável na identificação das representações e nos tratamentos geométricos. Já, o registro figural, movimenta tanto as representações bidimensionais (em perspectiva ou seções planas), como as tridimensionais (o objeto construído em maquete).

Desenhar em perspectiva

Fazer um desenho que represente as três dimensões (largura, altura e profundidade) sobre uma superfície geralmente plana e, conseqüentemente, em duas dimensões (largura e altura), constituiu-se numa problemática que vem instigando, como se vê, os homens desde a Antigüidade. Vale, então, investigar de onde provém a idéia de desenhar em perspectiva tal como concebemos hoje.

Mas, por que é interessante estudar a perspectiva? Em que ela serve aos Matemáticos, ou ao Professor de Geometria? Ao aluno? E, para todos preocupados com a Educação?

Levantar a problemática da representação do espaço, significa trazer a questão do desenho das formas do mundo para a superfície (o plano), isso envolve ver como elas estão no espaço e recolocá-las, então, em outro espaço, o espaço do papel, o da representação gráfica. Significa pensar que a representação destas formas do mundo tem a ver mais com a forma de “ver e perceber”⁸ o mundo, do que o mundo em si e que, por isso a forma de representar as formas do mundo tem história, ou seja, são construções culturais, ou melhor dizendo, são interpretações segundo a categorias próprias do sujeito histórico em questão.

Muitas são as maneiras criadas para representar o espaço. Diferentes povos vivenciaram maneiras peculiares de transpor para uma superfície plana o espaço, imbricadas numa cultura visual própria. “Os egípcios utilizavam a perspectiva horizontal, os hindus a perspectiva irradiante, os chineses e os japoneses a perspectiva a vôo de pássaro, os próprios bizantinos a perspectiva invertida” (Debray, 1993, p. 230). De fato, mesmo na Europa ocidental, na Antigüidade, na Idade Média e por todo Renascimento, diferentes maneiras de perceber o mundo e o espaço, conduziram a diferentes formas de representá-lo.

Hoje, quando queremos desenhar em perspectiva recorremos, basicamente, a uma técnica muito comum, a perspectiva linear⁹. Esta maneira parece-nos hoje um instrumento matemático de fácil manejo. Seus métodos, princípios e idéias praticamente dispensam explicações. Mas não foi sempre assim; verdadeiras rupturas aconteceram, muitas revoluções no modo de ver, olhar e conceber o espaço foram travadas para que uma geometrização coerente da representação espacial fosse assegurada.

Foi durante o século XV que pintores e arquitetos formularam este “modo moderno” de representar o espaço apoiando-se sobre um sistema homogêneo e global. Esta perspectiva, tal como foi elaborada no Renascimento veio a se tornar, parece, hegemônica na cultura ocidental. Que fatores levaram a este tipo de construção e por que esta técnica teria sido aceita como verdadeira e se desdobrado até os dias atuais?

Percebe-se que o problema da representação do espaço tem causas abrangentes e origens históricas aprofundadas. A “geometrização do espaço” leva a crer que a perspectiva da renascença, se reduziria à matemática. No entanto, por trás dos

⁸ Foucault explica que no século XVIII “o sólido, o obscuro, a densidade das coisas encerradas em si próprias têm poderes de verdade que não provêm da luz, mas da lentidão do olhar que os percorre, contorna e, pouco a pouco, os penetra, conferindo-lhes apenas sua própria clareza” (p. 12, 1998).

⁹ A perspectiva linear, segundo Olmer, é chamada assim porque “ela faz uso exclusivamente do traço (linhas retas ou curvas) para representar, curvas, planos volumes e seus contornos” (1943, p. 2). Fazer um desenho que represente as três dimensões (largura, altura e profundidade) sobre uma superfície geralmente plana e, conseqüentemente, em duas dimensões (largura e altura), constituiu-se numa problemática que vem instigando, como se vê, os homens desde a Antigüidade. Vale, então, investigar de onde provém a idéia de desenhar em perspectiva tal como concebemos hoje.

raciocínios matemáticos é preciso ver que “*havia alguma coisa mais espontânea e mais intuitiva: uma nova maneira de olhar o mundo, de ‘sentir’ sua organização, de imaginar suas estruturas*” (Thuillier, 1994, p. 61).

Olhar em Perspectiva

A história da arte conta que por volta dos primeiros anos do Renascimento, um pequeno grupo de artistas cria um novo espaço plástico. Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, Ucello, entre outros, romperam com alguns dos pressupostos da Idade Média, colocando um princípio de uma organização do espaço fundado na medida. É “*o fim das epifanias, princípio dos trompe-l’œil*” (Debray, 1994, p. 232). Uma nova percepção de espaço exige, portanto, um novo modo de representá-lo. Recorre-se, assim, à geometria, às proporções e ao cálculo das dimensões aparentes. E, entre este grupo de artistas, encontra-se Alberti, considerado o primeiro codificador desta inovação geométrica.

A Renascença trouxe, portanto, a possibilidade de uma representação medida e padronizada: a perspectiva linear. Esta foi estudada pelos pintores e arquitetos, “*que pretendiam bem ‘imitar a natureza’ e ‘até enganar o olho’*” (Klein, 1998, p. 284). A aparência das coisas se obtém ponto por ponto, a imagem de um ponto do espaço é a interseção do quadro com a pirâmide visual que liga ao olho do artista. É o que Alberti chamou de “abrir uma janela para o mundo” (Panofsky, 1981).

Essa secularização do pensamento e da ação do homem certamente não foi obra de Alberti em particular, ou mesmo de um grupo específico de artistas. Ligou-se a mudanças profundas que afetaram todas as relações da vida e do poder na cultura ocidental. Isso não quer dizer que, por exemplo, a idéia que as pessoas tinham de si como parte de um universo de criação divina desaparecesse, mas que pelo menos perdeu sua posição central e dominante no pensamento.

Em suma, as pessoas assumiram uma posição de observador e pensador. “*O olhar não é mais redutor, mas fundador do indivíduo em sua qualidade irreduzível. E, assim torna-se possível organizar em torno dele uma linguagem racional*” (Foucault, 1998, p. 12). A cultura moderna aprofunda a linha do racionalismo. É uma visão racional do espaço e dos objetos tridimensionais que ali se encontra. É a busca pela unidade, é o olhar racionalizante. “*O olhar da Renascença chama-se perspectiva*” (Bosi, 1990, p. 74). É o olho que examina, esquadrinha, mede, analisa, separa, ele nada perde. No entanto, é um olho central, imóvel, “*uma vez que a teoria da perspectiva linear reduz toda a imaginação plástica à visão monocular e a um único ponto de vista*” (Francastel, 1982, p. 12).

Tudo isso, diz Foucault, teve grandes conseqüências para o pensamento ocidental. Mas tudo não foi sempre assim. Por isso, “*o que cumpre apreender e tentar restituir são as modificações que alteraram o próprio saber*”, (...) (Foucault, 1992, p. 70).

Para os Antigos a “boa perspectiva” é bem o contrário daquela que concebemos hoje. Isto porque a

“Ótica Antiga entendia o campo de visão como uma esfera. Sustentava, por isso, que as grandezas aparentes (isto é, as projeções dos objetos dentro desse campo de visão esférico) são, sempre e exclusivamente, determinadas pela amplitude dos ângulos de visão, não pela distância a que os objetos estão do olho” (Panofsky, 1993, p. 37).

A Ótica de Euclides, portanto, vem confirmar estas premissas.

O espaço na Idade Média, considerado imutável e atributo da essência divina, era representado na forma de um espaço-agregado: os objetos e as pessoas são justapostos sobre um plano, cujos tamanhos são determinados pelo status social dando um caráter às cenas bem pouco “realista”; não são relacionados uns com os outros por meio de um entrelaçamento matemático. Assim, a justaposição é a forma básica na concepção medieval para representar o espaço, *“princípio de expansão e não de concentração, de coordenação e não de subordinação, da seqüência aberta e não da forma geométrica fechada” (Hauser, 2000, p. 28).*

A representação do espaço na Idade Média é, portanto, regida por um motor divino, um olhar transfigurador que define *“os universos fechados e compartimentados, qualificados e fragmentados” (Debray, 1994, p. 231).* Para um espaço representado de tal forma o observador deve movimentar-se o tempo todo, mudando sempre seu foco ótico para apreender o conjunto das imagens. Contrariamente, a representação clássica, subordina o olhar do observador a uma única leitura que é dirigida, necessariamente, pela dinâmica que o ponto único e central impõe. Essa subjetivação do olhar terá seu custo em todos os campos do conhecimento.

Nossos olhos foram, então, exercitados para o olhar? Sim e Não. Se, se pretende uma leitura única, uniforme e homogênea, nosso olhar renascentista parece bem treinado. Contudo, este mesmo olhar nos amarra num único foco de visão. Isso, certamente, nos coloca dificuldades na visualização das imagens e, particularmente, na leitura de figuras tridimensionais em problemas matemáticos, uma vez que *“a nossa percepção e a nossa apreciação de uma imagem depende também do nosso próprio modo de ver” (Berger, 1999, p. 14).*

Considerações Finais

A problematização de nossa atualidade, no que diz respeito ao uso da perspectiva como técnica da representação, leva ao estudo de outras formações históricas para buscar, diante delas, as rupturas que permitiram a constituição do presente, tal como ele se apresenta ao nosso olhar. Importante empreender, pois, uma descrição de como a questão da perspectiva foi expressa no mundo artístico, embasada por aspectos filosóficos e, ou epistemológicos, que perpassam momentos específicos de concepções e representações de espaço, entendendo que os modos de ver são culturais e estes interagem com os modos de representação espacial. Entender, desta forma, que a história da perspectiva está inserida nas problemáticas da representação do espaço como algo que envolve aspectos da sociedade em questão e dos seus regimes de conhecimento.

Não significa, no entanto, escrever uma história do pensamento renascentista, que inventa o espaço cartesiano, tomando a idéia de geometrização do espaço, ou das mudanças do comércio, ou qualquer outro tema que se queira tomar como partida. Isso seria fazer apenas uma “história das opiniões”, como diz Foucault (1992). Empreendedor é descrever como e por que, no Renascimento, o olhar dirigido às coisas se transformou, e de algum modo se geometrizou. É tomar o olhar como objeto de análise ao qual, todo o conhecimento ocidental, desde a Grécia até a modernidade, lhe tem dado fundamental importância.

Hoje, é esta forma de olhar, de um sujeito moderno, que compete e entra em atrito com uma outra maneira de olhar, exigida por um sujeito que reflete e significa outra realidade. Já não há mais domínio em que este olhar moderno, tradicional, seja compatível em nossa época, e, (...) *“uma das características desta era está provavelmente na impossibilidade de se representar o mundo como totalidade unificada por categorias rígidas que gravitam em torno de um centro”* (Santaella, 1994, p. 23). Muitos, e diferenciados, pensadores, diz Martin Jay (1988), têm questionado a antiga nobreza da vista.

Se, de um lado, esta história do processo de representação do espaço compreende o registro de seus fundamentos, por outro, as práticas educativas também se fundam na cultura, nos estilos de aprendizagem, bem como nas tradições. Portanto, parece imprescindível discutir esta história na Educação e, em especial, na Educação Matemática.

Ainda, se a problemática da representação do espaço e sua congênere perspectiva já se fez presente como foco de estudo desde a Antigüidade mostrando-se ser capaz de desencadear vários fatores que dificultam sua apreensão, no ensino, então, faz-se necessário uma conscientização destes fatores, tanto daqueles que causam dificuldades ao aluno, como dos que podem desempenhar auxílio.

Para uma educação visual e, principalmente, para a visualização de figuras geométricas tridimensionais, a descentralização do foco do olhar faz-se necessária. Como diz Duval (1993), importante é propor-se um ensino que privilegie o trânsito pelas diversas formas de representação, as quais entram em jogo numa representação tridimensional.

Referências

- BERGER, J. *Modos de Ver*. Tradução de Ana Maria Alves. Lisboa: Edições 70, 1999.
- BESSOT, D. et LE GOFF, J. P. Mais où est donc passée la troisième dimension? In: *Histoires de Problèmes, Histoires des Mathématiques*. Paris: Edition Marketing, 1993, p. 199-240.
- BOSI, A. Fenomenologia do olhar. In: NOVAES, A. (Org.). *O olhar*. São Paulo: Companhia das Letras, 1990. p. 65-87.
- BOLDA, C. R. F. Geometria e Visualização: Desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. Florianópolis: UFSC, 1997. 152p. Dissertação. (Mestrado em Educação) Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina.
- CAVALCA, A. de P. V. Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação. Série Hipótese. Luna, S. V. de (Org.). São Paulo: Educ, 1998.
- DEBRAY, R. *Vida e morte da imagem: uma história do olhar no ocidente*. Tradução de G. Teixeira. Petrópolis: Vozes, 1993.
- DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes en géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1, IREM de Strasbourg, p. 57-74, 1988.
- _____. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, p.37-65, 1993.
- _____. *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne, 1995.
- FRANCASTEL, P. *A Realidade Figurativa: Sociologia da Arte*. Tradução de M. A. L. Barros. São Paulo: Perspectiva, 1982.
- FOUCAULT, M. *O Nascimento da Clínica*. Machado, R. (trad.). 5. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1998.
- _____. *As palavras e as coisas*. 6. ed. Tradução de S. T. Muchail. São Paulo: Martins Fontes, 1992.
- HAUSER, A. *História Social da Arte e da Literatura*. Tradução de A. Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- JAY, M. En el imperio de la mirada: Foucault y la denigración de la visión en el pensamiento francés del siglo XX. In: HOY, D. C. (Ed.). *Foucault*. Tradução de A. Bonano. Buenos Aires: Nueva Visión, 1988.
- KALEFF, A. M. M. R. *Vendo e Entendendo Poliedros*. Niterói: EdUFF, 1998.
- KLEIN, R. *A forma e o inteligível: escritos sobre o Renascimento e a Arte Moderna*. Tradução de C. Arena. São Paulo: Edusp, 1998.
- MESQUITA, A. L. A influência de aspects figuratis dans l'argumentation des élèves en géométrie. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, 1989.
- OLMER, P. *Perspectiva Artística – Principes et Méthodes*. Vol. I. Paris: Librairie Plon, 1943.
- OSTROWER, F. P. *Universos da Arte*. Rio de Janeiro: Campus, 1987.
- PADILLA, V. *L' influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, 1992.
- PAIS, L. C. A representação dos corpos redondos no ensino da geometria. *Zetetiké*. Campinas: Unicamp - FE – CEMPEM, ano 2, n. 2 – mar. p. 13 –23, 1994.
- PANOFKY, E. *Renascimento e Renascimento na Arte Ocidental*. Tradução de F. Neves. Lisboa: Editorial Presença, 1981.
- _____. *A perspectiva como forma simbólica*. Tradução de E. Nunes. Lisboa: Edições 70, 1993.
- ROMMEVAUX, M. *Le discernement des plans: un seul décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. Thèse de doctorat. ULP, 1997.

SANTAELLA, L. Pós-moderno e Semiótica. In: CHALHUB, S. (Org.). *Pós-moderno e semiótica, cultura, psicanálise, literatura, artes plásticas*. Rio de Janeiro: Imago, 1994.

THUILLIER, P. *De Arquimedes a Einstein: a face oculta da invenção científica*. Tradução de M. I. Duque-Estrada. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1994.